

Комп'ютерна візуалізація гідродинамічного поля в області з криволінійними межами

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2021.46>

Тетяна Цветкова

Кафедра комп'ютерних наук та прикладної математики
 Національний університет водного господарства та природокористування
 Рівне, Україна
 t.p.tsvetkova@nuwm.edu.ua

Анотація — Для покращення водно-сольового режиму ґрунтів використовують гідромеліоративні заходи. Зокрема, застосовують систематичний дренаж горизонтального типу, який забезпечує відведення сольових розчинів та надмірної вологи або нагнітання води. В результаті чого дослідження гідродинамічних процесів відбувається в областях складної геометричної форми, що значно ускладнює розв'язування задач в таких областях. З цією метою розглянуто побудову чисельного конформного відображення області насичено-ненасиченого ґрунту з урахуванням роботи горизонтальної дренажної системи.

Ключові слова — конформне відображення; гідродинамічна сітка; область повного та неповного насичення; дрени глибокого та мілкого закладання.

I. ВСТУП

Прогнозування та попередження небезпечних гідродинамічних процесів, таких як підтоплення територій, забруднення та засолення ґрунтових вод є важливими задачами підземної гідродинаміки. Дослідження даних процесів в областях з криволінійними, вільними межами та фазовими переходами значно ускладнює встановлення гідродинамічної області та розв'язування задач в таких областях. В зв'язку з цим, на практиці в основному використовуються чисельні методи їх розв'язання. Зокрема, побудову різницевої сітки в областях з криволінійними межами здійснюють за допомогою чисельних конформних відображень.

В даній роботі розглянуто побудову гідродинамічної сітки процесу солеперенесення до дрен глибокого та мілкого закладання в області насичено-ненасиченого ґрунтового середовища.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається процес солеперенесення при плоско-вертикальній фільтрації та вологоперенесенні до системи горизонтальних дрен глибокого та мілкого закладання з сильно фільтруючим елементом в областях повного G_1 та неповного G_2 насичення (рис. 1) [3].

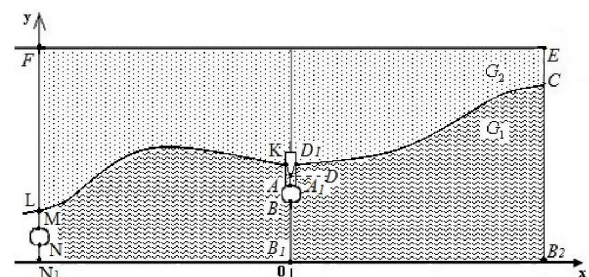


Рисунок 1. Солеперенесення до системи горизонтальних дрен з фільтруючим елементом у насичено-ненасиченому ґрунтовому масиві

Необхідно розв'язати задачу побудови чисельного конформного відображення області дослідження $N_1 F E B_2$ на параметричний прямокутник для можливості проведення подальших досліджень протікання гідродинамічних процесів в даній області.

III. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Основна складність даної задачі полягає в тому, що процес фільтрації відбувається в області, яка розглядається сумісно для областей повного та неповного насичення. При тому, що область повного насичення є двозв'язною областю з 4-ма відміченими точками на зовнішньому контурі. Тому для вирішення поставленої задачі необхідно застосовувати чисельні методи конформних відображень. В результаті чого побудувати конформну різницеву сітку фільтраційного потоку, потоку вологи з візуалізацією їх на комп'ютері, що дасть можливість в подальшому встановити поле напорів рідини та вологи у відповідних областях, швидкостей фільтрації та концентрації сольового розчину, здійснити прогнозування протікання процесу солеперенесення під дією роботи дренажної системи та руху рівня ґрунтових вод [3, 4].

Загальна область G складається з двох підобластей G_1 та G_2 (рис. 1), кожна з яких обмежена двома екіпотенціальними лініями і двома лініями току, тобто, являють собою чотирикутні області. При цьому нижня межа області G_2 є частиною верхньої межі області G_1 . Тоді розглянута певна область при конформному відображенні перейде в параметричний прямокутник $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Підобласті

відображаються в частини прямокутника відповідно до індексів. Оскільки всередині області G_1 наявна порожнина (дрена), то вона відображається у відповідний розріз в область Ω_1 параметричного прямокутника Ω . Цей параметричний прямокутник співпадає в даному випадку з областю комплексного потенціалу ξ, η . Верхня область неповного насичення аналогічна нижній, проте не містить порожнини.

Необхідно побудувати конформне відображення двозв'язної області. У випадку розв'язування гідродинамічних задач в даній області необхідно зробити запис вихідної математичної моделі у змінних ξ, η області параметричного прямокутника [1, 2, 4].

Розглянемо побудову конформного відображення області G на параметричний прямокутник Ω , яке реалізується функцією $\zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$, в оберненій постановці. Тобто, необхідно знайти обернене конформне відображення параметричного прямокутника Ω на криволінійний чотирикутник G , яке задається функціями $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$. (1)

Відомо, що обернене відображення представляється аналітичною функцією $z = z(\zeta)$ і також є конформним, тобто функції $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ також зв'язані умовами Коші-Рімана аналогічно $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, (x, y) \in \partial G_z$.

На ділянках границі $\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_z^i$ спряжені гармонічні функції $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ зв'язані рівняннями $g_i(x, y) = 0, i = \overline{1, 4}$, що їх задають.

Тоді задача побудови оберненого конформного відображення полягає в наступному: знайти пару спряжених гармонічних функцій (1), зв'язаних умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}, (\xi, \eta) \in G_\zeta, \quad (2)$$

і задовольняють рівнянням границі

$$g_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = 0, i = \overline{1, 4}, (\xi, \eta) \in \Gamma_\zeta^i. \quad (3)$$

До граничних умов (3) додаються рівняння "зв'язку" межових точок з примезовими в одному з виглядів: умови (2) та умови ортогональності ліній сітки, які використовують та не використовують рівняння самої межі Ω .

Алгоритм конструктивної побудови різницевої сітки за допомогою даної математичної моделі ґрунтується на апроксимації системи рівнянь (2). Рівняння, необхідні для визначення всіх вузлів різницевої сітки отримано з рівнянь "зв'язку", які можна одержати двома способами: 1) шляхом апроксимації умов Коші-Рімана в околі границі області; 2) в результаті апроксимації умов ортогональності.

Для уточнення координат «плаваючих» вузлів аналітично заданих кривих використано умову ортогональності та умову «плавання» по контуру. У випадку задання контурів достатньо густими масивами точок доцільно було апроксимувати межу кубічним сплайном. Для перевірки отриманої

різницевої сітки на «конформність» використано критерії конформності на множині всіх вузлів сітки, крім фіксованих у вершинах прямокутника, та на множині внутрішніх вузлів.

IV. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧІ

Програмну реалізацію задачі побудови чисельного конформного відображення складеної області виконано у програмному середовищі Microsoft Visual Studio 2017 на мові C#.

Оскільки постановку задачі (рис. 1) розроблено за прикладом реальної дренажно-модульної системи, було максимально дотримано реальних розмірів такої системи: відстань між дренами може варіюватись від 10 до 20 метрів, дрена мілкого закладання розміщується не глибше 1м від поверхні ґрунту, радіус дрен – 0.15 м.

В результаті програмної реалізації розробленого алгоритму отримано конформну різницеву сітку в початковий момент часу $t=0$ (рис. 2):

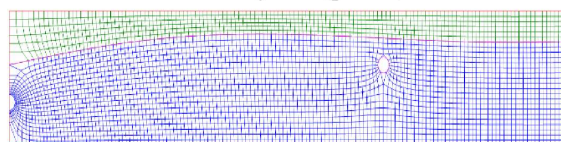


Рисунок 2. Згенерована конформна різницева сітка

Отримана конформна різницева сітка, яка є гідродинамічною та ортогональною, встановлює відповідність між вузловими точками у фізичній області з криволінійними внутрішніми межами з вузловими точками прямокутної сітки в області комплексного потенціалу, що дає можливість проведення досліджень протікання гідродинамічних процесів в даній області [3].

ВИСНОВКИ

Розглянуто побудову конформної різницевої сітки області насичено-ненасиченого ґрунту при наявній горизонтальній дренажній системі. В результаті застосування розробленого алгоритму отримано спільну гідродинамічну сітку фільтраційного потоку та потоку вологи для проведення досліджень процесу солеперенесення при плоско-вертикальній фільтрації та вологоперенесенні до системи горизонтальних дрен глибокого та мілкого закладання.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Власюк А. П., Михальчук В. Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двух- и трехсвязных областей. (Препр. № 2). Киев, 1991. 56 с.
- [2] Власюк А. П., Михальчук В. Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с «плавающими» узлами (Препр. 89.79). Киев, 1989. 55 с.
- [3] Vlasjuk A. P., Tsvietkova T. P. Mathematical modelling of salt transfer to system of horizontal drains with filtering element in zones of complete and incomplete saturation. XXXI International conference «Problems of decision making under uncertainty». Lankaran-Baku, Azerbaijan Republic (July 3-8, 2018). 2018. Pp. 133–134.
- [4] Vlasjuk A. P., Tsvetkova T. P. Mathematical Simulation of the Transport of Salt in the Case of Filtration and Moisture Transfer in Saturated-Unsaturated Soils in a Moistening Regime. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. Springer US, New York. Vol. 88. Issue 5. 2015. Pp. 1062–1073.