Узагальнена розв'язність псевдопараболічних інтегро-диференціальних рівнянь

https://doi.org/10.31713/MCIT.2023.030

Андрій Анікушин
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
КНУ імені Тараса Шевченка
м. Київ, Україна
anik_andrii@ukr.net

Анастасія Андарал
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
КНУ імені Тараса Шевченка
м. Київ, Україна

Анотація—**У роботі використовується метод апріорних нерівностей в негативних нормах для доведення коректності постановки початково-крайової задачі Діріхле для інтегро-диференціального рівняння псевдопараболічного типу з інтегральними доданками типу Вольтерра.**

Ключові слова—задача Діріхле; інтегро-диференціальне рівняння; оператор Вольтерра; апріорні оцінки; узагальнені розв'язки.

I. Вступ

Псевдопараболічні диференціальні рівняння виникають при дослідженнях фільтрації рідини та газу в пористих середовищах та середовищах "з тріщинами", теплопровідності в неоднорідних середовищах, міграції іонів у ґрунті, розповсюдження хвиль в дисперсному середовищі та в тонкому еластичному склі, тощо [1].

Багато результатів щодо коректності постановок, оптимального керування та керованості процесами, що описуються рівняннями псевдопараболічного типу було отримано С.І. Ляшком за допомогою методики апріорних нерівностей в негативних нормах (див., наприклад, [1], [2] та наведену там бібліографію).

Основні положення теорії апріорних нерівностей в негативних нормах та деякі її застосування описано у класичній монографії [1]. Підхід розроблений С.І. Ляшком та його учнями виявився досить ефективним для дослідження різноманітних питань коректності постановок, оптимального керування, керованості систем з розподіленими параметрами. Зокрема, і до задач Діріхле для інтегро-диференціальних рівнянь з інтегральними доданками типу Вольтерра [3],[4],[5].

У нашій роботі ми доводимо апріорні нерівності для задачі Діріхле для псевдопараболічного рівняння

$$\mathcal{L}u \equiv L_D u + L_I u = f(x,t), \qquad (1)$$

з однорідними умовами

$$u|_{t=0} = 0, \; u|_{x\in\partial\Omega} = 0. \qquad (2)$$

Тут

$$L_D u \equiv (Au)_t + Bu,$$

$$L_I u \equiv \int_0^t \sum_{i=1}^n \left(K_i(x,t,\tau)\, u_{x_i}(x,\tau)\right)_{x_i} d\tau,$$

та

$$Au \equiv -\sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x)\, u_{x_j}\right)_{x_i} + a(x)u,$$

$$Bu \equiv -\sum_{i,j=1}^n \left(b_{ij}(x)\, u_{x_j}\right)_{x_i} + b(x)u.$$

Тим самим, ми розширюємо клас рівнянь, до яких може бути застосовано цитований вище метод. На основі цих нерівностей ми обґрунтовуємо коректність постановки початково-крайової задачі та наводимо відповідні теореми про існування та єдиність узагальнених розв'язків.

II. Постановка задачі

Розглянемо циліндричну область $Q = \Omega \times (0,T)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$, та лінійне рівняння (1) з інтегро-диференціальним оператором. При цьому $u(x,t)$ – шукана функція, що описує стан системи в області Q.

Надалі будемо вважати, що $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n \subset C^1(\overline{\Omega}), a, b \in C(\overline{\Omega})$, для всіх $x \in \Omega$ мають місце співвідношення

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), b_{ij}(x) = b_{ji}(x), a(x) \geq 0, \; b(x) \geq 0,$$

та, що коефіцієнти $a_{ij}(x)$ та $b_{ij}(x)$ при довільних $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ та $x \in \overline{\Omega}$ задовольняють умовам

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0$$

для деякої додатної сталої α.

Вважатимемо також, що ядра $K_i(x,t,\tau)$ є неперервно-диферецційовними. Зокрема, для деякої сталої M справджується нерівність $|K_i(x,t,\tau)| < M$ для всіх $x \in \Omega$ та $t,\tau \in [0,T]$.

Областю визначення оператора $\mathcal{L}$ вважатимемо простір, що складається з множини нескінченну кількість разів диференційовних в області $\overline{Q}$ функцій, що задовольняють однорідним початковим та граничним умовам типу Діріхле (2). Таку множину будемо позначати C^{∞}_{BR}.

Розглянемо простір W^{+}_{BR}, що є поповненням C^{∞}_{BR} за нормою

$$\|u\|_{W^{+}_{BR}} = \left(\int_Q u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2\, dQ\right)^{1/2}. \quad (3)$$

Також розглянемо спряжений оператор $\mathcal{L}^{*}v$. Його областю визначення вважаємо простір, який складається з множини гладких в області $\overline{Q}$ функцій, що задовольняють початковим та граничним умовам

$$v|_{t=T} = 0, \;\; v|_{x\in\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Через $W^{+}_{BR^{+}}$ позначимо поповнення множини $C^{\infty}_{BR^{+}}$ за тією ж нормою (3).

Розглянемо негативні простори W^{-}_{BR}, $W^{-}_{BR^{+}}$, що побудовано за позитивними просторами W^{+}_{BR}, $W^{+}_{BR^{+}}$, відповідно, відносно $L_2(Q)$.

Через H^{+}_{BR} позначимо поповнення простору гладких функцій в області $\overline{Q}$, що задовольняють початковим та граничним умовам (2) за нормою

$$\|u\|^2_{H^{+}_{BR}} = \int_Q \left(u^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\right) dQ. \quad (5)$$

Простір $H^{+}_{BR^{+}}$ – поповнення простору гладких функцій в області $\overline{Q}$, що задовольняють початковим та граничним умовам (4) за нормою (5). Через H^{-}_{BR}, $H^{-}_{BR^{+}}$ позначимо відповідні негативні простори.

III. АПРІОРНІ НЕРІВНОСТІ

Лема 1. Існує така стала $C > 0$, що нерівність $C\|u\|_{W^{+}_{BR}} \geq \|\mathcal{L}u\|_{W^{-}_{BR^{+}}}$ виконується для довільної гладкої функції $u(x,t) \in W^{+}_{BR}$, а для довільної гладкої функції $v(x,t) \in W^{+}_{BR^{+}}$ виконується нерівність $C\|v\|_{W^{+}_{BR^{+}}} \geq \|\mathcal{L}^{*}v\|_{W^{-}_{BR}}$.

Лема 2. Існує така стала $C > 0$, що нерівність $C\|u\|_{W^{+}_{BR}} \geq \|\mathcal{L}u\|_{W^{-}_{BR^{+}}}$ виконується для довільної функції $u(x,t) \in W^{+}_{BR}$, а для довільної функції $v(x,t) \in W^{+}_{BR^{+}}$ виконується $\|\mathcal{L}^{*}v\|_{W^{-}_{BR}} \geq C\|v\|_{H^{+}_{BR^{+}}}$.

Таким чином для операторів $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{*}$ мають місце апріорні нерівності

$$C_1 \| u \|_{H^{+}_{BR}} \leq \| \mathcal{L}u \|_{W^{-}_{BR^{+}}} \leq C_2 \| u \|_{W^{+}_{BR}}, \quad (6)$$

$$C_1 \| v \|_{H^{+}_{BR^{+}}} \leq \| \mathcal{L}^{*}v \|_{W^{-}_{BR}} \leq C_2 \| v \|_{W^{+}_{BR^{+}}} \quad (7)$$

для довільних $u \in W^{+}_{BR}$, $v \in W^{+}_{BR^{+}}$.

IV. УЗАГАЛЬНЕНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ

Розглянемо задачу

$$\mathcal{L}u = f,\, f \in W^{-}_{BR^{+}}. \quad (8)$$

Її розв'язки будемо розуміти в сенсі таких означень

Означення 1. Узагальненим (слабким) розв'язком задачі з правою частиною $f \in W^{-}_{BR^{+}}$ називається така $u \in W^{+}_{BR}$, що рівність

$$(\mathcal{L}u, v)_{W^{+}_{BR}} = (f, v)_{W^{+}_{BR^{+}}}$$

виконується для будь-яких функцій $v \in W^{+}_{BR^{+}}$.

Означення 2. Узагальненим (слабким) розв'язком задачі з правою частиною $f \in W^{-}_{BR^{+}}$ називається така функція $u \in H^{+}_{BR}$, що для будь-яких функцій $v \in W^{+}_{BR^{+}}$ виконується рівність

$$(u, \mathcal{L}^{*}v)_{H^{+}_{BR}} = (F, v)_{W^{+}_{BR^{+}}}.$$

Ґрунтуючись на доведених апріорних нерівностях (6), (7) та, використовуючи результати роботи [1], можна сформулювати теореми узагальненої розв'язності.

Теорема 1. Для будь-якої функції $f \in H^{-}_{BR^{+}}$ існує єдиний розв'язок $u \in W^{+}_{BR}$ задачі (8) в сенсі означення 1. Причому, для деякої сталої C справедлива нерівність $||u||_{W^{+}_{BR}} \leq C||f||_{H^{-}_{BR^{+}}}$.

Теорема 2. Для будь-якої функції $f \in W^{-}_{BR^{+}}$ існує єдиний розв'язок $u \in H^{+}_{BR}$ задачі (8) в сенсі означення 2. Причому, для деякої сталої C справедлива нерівність $||u||_{H^{+}_{BR}} \leq C||f||_{W^{-}_{BR^{+}}}$.

Зауваження. Аналогічні означення та теореми можна сформулювати й для спряженої задачі.

ЛІТЕРАТУРА

[1] S.I. Lyashko, "Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters", Kluwer Academic Publishers, 2002, 455 p.

[2] I.V. Sergienko, O.M. Khimich, D.A. Klyushin, V.I. Lyashko, S.I. Lyashko and V.V. Semenov, "Formation and Development of the Scientific School of the Mathematical Theory of Filtration," Cybernetics and Systems Analysis, vol. 59, 2023, pp. 61–70.

[3] A. Anikushyn and O. Zhyvolovych, "Generalized solvability and optimal control for an integro-differential equation of a hyperbolic type," Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference, №5, 2021, pp. 8–9.

[4] A. Hulianytskyi and A. Anikushyn, "Generalized solvability of parabolic integro-differential equations," Differential Equations, vol.50 (1), 2014, pp. 98–109.

[5] A.V. Anikushyn, "Generalized optimal control for systems described by linear integro-differential equations with nonnegative definite integral operators," Journal of Automation and Information Sciences, vol. 46 (6), 2014, pp. 58–67.