MCIT Modeling, control & information technologies

Ортогональна система тригонометричних функцій із змінним періодом та деякі її властивості

https://doi.org/10.31713/MCIT.2023.039

Микола Приймак
Кафедра комп'ютерних наук
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
м. Тернопіль, Україна
pmw.ukr@ukr.net

Abstract—**Звернуто увагу на наявність періодичних сигналів із змінним періодом та відсутність методів їх дослідження. Наведено визначення періодичних функцій із змінним періодом, які можуть бути використані як моделі згаданих сигналів. Розглянуто деякі властивості таких функцій, зокрема побудована ортогональна система тригонометричних функцій із змінним періодом, що є основою побудови їх рядів Фур'є.**

Keywords—змінний період: періодичні функції із змінним періодом; ортогональна система тригонометрична функцій із змінним періодом; ряди Фур'є періодичних функцій із змінним періодом

I. Вступ

В прикладних дослідженнях часто виникає потреба побудови рядів Фур'є періодичних сигналів і вирішення на цій основі певних задач. Наприклад, в акустиці, гідроакустиці, радіолокації важливими є задачі виявити та розпізнати джерела періодичних сигналів, визначити їх амплітудний і фазовий спектри, обчислити віддаль до цих, визначити їх місцезнаходження, швидкість та напрямок переміщення тощо. Спектральний аналіз широко використовуються при дослідженні астрономічних явищ рентгенівського типу. Для періодичних сигналів, моделлю яких є періодичні функції, теорія та методи їх аналізу розроблені достатньо різносторонньо [1, 2].

Проте крім періодичних сигналів в традиційному розумінні цього поняття зустрічаються сигнали, які з однієї сторони ведуть себе подібно до періодичних, проте їх період вже не є постійним, а певним чином змінюється. Такими є електрокардіограми, отримані під час чи після дії на організм певного збудника спокою, наприклад, фізичного навантаження, звук сирени повітряної тривоги, сирени швидкої допомоги тощо.

Наявність періодичних сигналів із змінним періодом генерує природне питання, яким чином їх досліджувати. Огляд літературних джерел показує, що до недавніх пір будь-якої теорії і методів вивчення згаданих сигналів не існувало. Що стосується тематики цієї доповіді, то для вирішення задач, подібних до згаданих вище, в першу чергу до побудови рядів Фур'є періодичних сигналів із змінним періодом, найперше необхідна наявність певної ортогональної системи функцій. Щоб перейти до розгляду такої системи, нагадаємо перші кроки на шляху виникнення і розвитку теорії періодичних функцій із змінним періодом, які розглядаються як моделі відповідних сигналів.

II. Визначення періодичної функцій із змінним періодом

Вперше визначення таких функцій було подано в роботі [3].

Означення. Функція $f(x)$, $x \in I \subseteq R$, називається періодичною із змінним періодом $T(x)$, якщо для всіх x, таких, що $x \in I$ та $x+T(x) \in I$, виконується рівність

$$f(x) = f(x+T(x)). \quad (1)$$

В частинному випадку, коли $T(x) = T = const$, із (1) видно, що f є періодичною функцією з періодом T.

Приклад змінного періоду $T(x)$ показано на рисунку 1. В точці x_1 період рівний $T(x_1)$, тобто значення функції в точках x_1 і $x_1+T(x_1)$ повторюються: $f(x_1) = f(x_1+T(x_1))$. В точці x_2 період рівний $T(x_2)$.

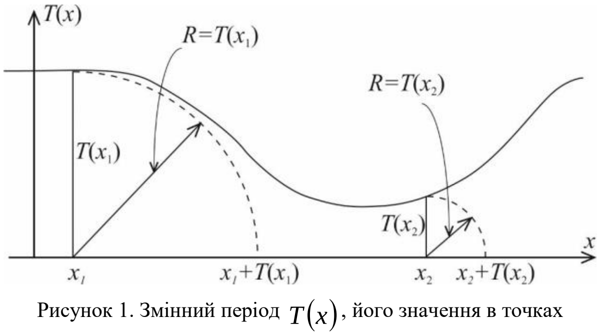

Рисунок 1. Змінний період $T(x)$, його значення в точках x_1 і x_2

III. ЗМІННИЙ ПЕРІОД $T^{-}(x)$.

Для періодичної функції $g(x)$ з постійним періодом T виконується рівність $g(x)=g(x+T)=g(x-T)$. Нескладні міркування, зокрема звернення до рисунку 1, показують, що для функції $f(x)$ із змінним періодом $T(x)$ аналогічна рівність $f(x)=f(x+T(x))=f(x-T(x))$ в загальному не виконується. Тому для випадку, коли аргумент x зменшується, введено змінний період, який позначається через $T^{-}(x)$, і такий що

$$f(x)=f\left(x-T^{-}(x)\right). \qquad (2)$$

IV. АНАЛІТИЧНЕ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ

Найпростішими періодичними функціями із змінним періодом є тригонометричні функції

$$\sin x^{\alpha},\ \cos x^{\alpha},\ x\in I=[0,\infty),\ \alpha>0, \qquad (3)$$

вперше розглянуті в роботі [4]. При $\alpha=1$ отримуємо звичайні тригонометричні функції. Обмеження на аргумент x викликане тим, що при $x<0$ в залежності від того, яким є параметр α, парним чи непарним, змінюється область I. Будемо вважати, що область $I=[0,\infty)$.

Приклад. На рисунку 2 зображена функція $f_1(x)=\sin x^{3/4},\ x\geq 0,$ (графік 1) та для порівняння функція $f_2(x)=\sin x$ (графік 2).

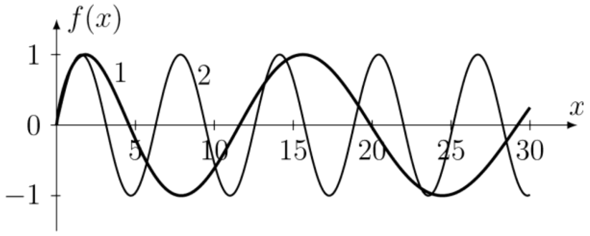

Рисунок 2. Функція $f_1(x)=\sin x^{3/4}$ (графік 1), $f_2(x)=\sin x$ (графік 2).

Аналізуючи графіки, видно, що функція $f(x)=\sin x^{3/4}$, із зростанням аргументу «розтягується», тобто її період збільшується.

V. ЗМІННІ ПЕРІОДІВ СИНУСОЇДАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ

Для тригонометричних функцій (3) їх змінний період вперше були записані в [5], і виражається формулами

$$T(x)=-x+\left(x^{\alpha}+2\pi\right)^{1/\alpha},\ \alpha>0,\ x\in[0,\infty), \qquad (4)$$

$$T^{-}(x)=x-\left(x^{\alpha}-2\pi\right)^{1/\alpha},\ \alpha>0,\ x\in[T(0),\infty). \qquad (5)$$

Приклад. Для функції $\sin x^{3/4}$ їх змінні періоди на основі формул (3) і (4) набувають вигляду

$$T_{3/4}(x)=-x+\left(x^{3/4}+2\pi\right)^{4/3},\ x\geq 0,$$

$$T_{3/4}^{-}(x)=x-\left(x^{3/4}-2\pi\right)^{4/3},\quad x\geq(2\pi)^{4/3}\approx 11.594.$$

Графіки цих періодів показані на рисунку 3. Для порівняння також наведений період функції $\sin x$: $T=2\pi$.

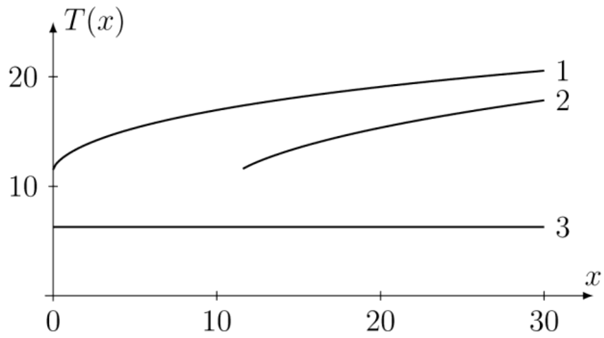

Рисунок 3. Змінні періоди для функції $\sin x^{3/4}$: $T_{3/4}(x)$, (графік 1); $T_{3/4}^{-}(x)$, (графік 2). Для порівняння період $T=2\pi$ для функції $\sin x$ (графік 3).

VI. ОРТОГОНАЛЬНА ТРИГОНОМЕТРИЧНА СИСТЕМА ФУНКЦІЙ ІЗ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ

Подібно до тригонометричної системи функцій

$$1,\ \sin kx,\ \cos kx,\ k=1,2,\ldots,$$

що є ортогональною на довільному інтервалі довжиною 2π , виникає природне питання щодо існування ортогональних системи тригонометричних функцій із змінним періодом. Вперше це питання розглядалося в [6]. В пізніших роботах автора підняті вище питання розглядалися більш детально.

Звернемось до базових тригонометричних функцій (3), змінні періоди яких виражається формулами (4) і (5). На основі цих функцій утворимо систему функцій

$$1,\ \sin kx^{\alpha},\ \cos kx^{\alpha},\ \alpha>0,\ x\in I,\ k=1.2,\cdots \qquad (6)$$

Для системи (6) має місце наступна теорема.

Теорема 1. Система тригонометричні функції (6), змінний період якої $T(x)=-x+\left(x^{\alpha}+2\pi\right)^{1/\alpha}$, є ортогональною із ваговою функцією $\rho(x)=\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$ на довільному інтервалі $[x,\ x+T(x)]$, тобто скалярний добуток різних функцій системи (3) рівний нуль, для однакових функцій їх скалярний добуток рівний π .

Наприклад, для різних функцій $\sin mx^{\alpha},\ \sin nx^{\alpha},\ m\neq n$, скалярний добуток

$$\left(\sin mx^{\alpha},\sin nx^{\alpha}\right)=\alpha\int_{\tau}^{\tau+T(\tau)}x^{\alpha-1}\sin mx^{\alpha}\sin nx^{\alpha}\,dx=0,\ m\neq n, \qquad (7)$$

Для однакових функцій, наприклад, для $\sin mx^{\alpha}, \sin mx^{\alpha}$, скалярний добуток

$$\left(\sin mx^{\alpha}, \sin mx^{\alpha}\right) = \alpha \int_{x}^{x+T(x)} x^{\alpha-1} \sin^2 mx^{\alpha} dx = \pi,\ m = 1,2,... \tag{8}$$

Доведення теореми опускається.

З формули (8) виходить, що норма кожної із функцій системи (3) рівна $\sqrt{\pi}$:

$$\|\cos kx\| = \|\sin kx\| = \sqrt{\pi},\ \ k = 1,2,... .$$

Зауваження 1. Звернемо увагу, що довжина інтервалу ортогональності $\left[x, x+T(x)\right], x \geq 0$, є **змінною** і залежить від його розміщення на області визначення I , точніше, від значення змінного періоду $T(x)$ в крайній лівій точці інтервалу.

Зауваження 2. Ортогональна система $1, \sin kx^{\alpha}, \cos kx^{\alpha}, k = 1.2, \cdots$, є базою побудови рядів Фур'є періодичних функцій із змінним періодом, змінний період яких співпадає із періодом ортогональної системи, що виражається формулою (4).

ЛІТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 544 с.

[2] Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. Москва: Радио и связь, 1986. 512 с.

[3] Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом. Вісник Тернопільського державного технічного університету. 2005. Вип. 10(2). С. 132–141.

[4] Приймак М.В. Періодичні функції із змінним періодом. Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. Тернопіль, вид. ТДТУ, 2007. С. 70.

[5] Приймак М.В. Змінні періоди деяких періодичних функції із змінним періодом. Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. Тернопіль, вид. ТДТУ, 2007. С. 71.

[6] Приймак М.В. Ортогональні системи періодичних функції із змінним періодом. Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. Тернопіль, вид. ТДТУ, 2007. С. 72.