Усереднення в узагальненій багаточастотній системі із запізненням

https://doi.org/10.31713/MCIT.2023.031

Ярослав Бігун
Кафедра прикладної математики
та інформаційних технологій
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
м. Чернівці, Україна
y.bihun@chnu.edu.ua

Ігор Скутар
Кафедра прикладної математики
та інформаційних технологій
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
м. Чернівці, Україна
i.skutar@chnu.edu.ua

Анотація—**Розглянуто багаточастотну систему диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами із різними степенями малого параметра. Побудовано усереднену систему рівнянь і одержано асимптотичну оцінку осциляційного інтеграла. Метод усереднення обґрунтовано з оцінкою також порядку. Наведено модельний приклад для ілюстрації одержаних результатів.**

Ключові слова—метод усереднення; резонанс; малий параметр; лінійно перетворений аргумент; аргумент із запізненням.

Математичні моделі коливних систем із амплітудними $a \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ і фазовими $\varphi \in \mathbb{R}^m$ змінними у класичних працях із нелінійної механіки [1, 2] мають вигляд

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon X(\tau, a, \varphi, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\tau, a) + \varepsilon Y(\tau, a, \varphi, \varepsilon), \tag{2}$$

де ε – малий додатній параметр, $\tau = \varepsilon t$ – "повільний час", вектор-функції X і Y – періодичні, квазіперіодичні або майже періодичні за змінними $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ і є степеневими розкладами за малим параметром. Такого вигляду системи рівнянь із запізненням аргументу досліджуються у багатьох працях, зокрема в [3-6].

Ефективним методом якісного дослідження і побудови наближеного розв'язку системи (1), (2) є усереднення за фазовими змінними φ_ν при $\varepsilon = 0$. Отримана на кубі періодів система рівнянь має вигляд

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \varepsilon X_0(\tau, \bar{a}), \ \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \omega(\tau, \bar{a}) + \varepsilon Y_0(\tau, \bar{a}),$$

і значно простіша, оскільки рівняння для амплітуд не залежить від фазових змінних.

У даній роботі розглядається задача із запізненням та малим параметром, який у рівняннях для амплітудних і фазових змінних може входити у різних степенях, не обов'язково цілих.

Розглядається система рівнянь із повільно змінними частотами вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = \varepsilon^{\kappa_1} X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{3}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon^{\kappa}} + \varepsilon^{\kappa_2} Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{4}$$

де $\tau = \in [0, L]$, $a \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $a_\Lambda(\tau) = \left(a(\lambda_1 \tau), \dots, a(\lambda_p \tau)\right)$, $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq 1$, $\varphi_\Theta(\tau) = \left(\varphi(\theta_1 \tau), \dots, \varphi(\theta_q \tau)\right)$, $0 < \theta_1 < \dots < \theta_p \leq 1$. Сталі $\kappa > 0$, $\kappa_1 \geq 0$, $\kappa_2 \geq 0$. При $\kappa - 1 = \kappa_1 = \kappa_2$ одержимо m-частотну систему рівнянь стандартного вигляду [3].

Відповідна (3), (4) усереднена за фазовими змінними система рівнянь набуває вигляду

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = \varepsilon^{\kappa_1} X_0(\tau, \bar{a}_\Lambda), \ \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon^{\kappa}} + \varepsilon^{\kappa_2} Y_0(\tau, \bar{a}_\Lambda).$$

Якщо розв'язок $\bar{a} = \bar{a}(\tau)$ із першого рівняння із початковою або інщою умовою знайдено, то знаходження розв'язку $\bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)$ зводиться до задачі інтегрування.

Для обґрунтування методу усереднення важливо встановити оцінку відповідного системі (3), (4) осциляційного інтегралу, який отримаємо після підстановки вираз $\varphi(\tau, \varepsilon)$ з інтегрального рівняння для $a(\tau, \varepsilon)$ в розклад вектор-функції $X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta)$ і набуває вигляду

$$\mathrm{I_k}(\tau, \varepsilon) = \int_0^\tau \mathrm{X_k}(\tau, \mathrm{a}_\Lambda) \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^\kappa} \int_0^s \gamma_\mathrm{k}(\mathrm{z}) d\mathrm{z}\right) d\mathrm{s}. \tag{5}$$

Тут $k = (k_1, \dots, k_q)$, $k_\nu \in \mathbb{Z}^m$, $k \neq 0$.

Функцією

$$\gamma_k(\tau) = \sum_{\nu=1}^{q} \theta_\nu (k_\nu, \omega(\theta_\nu \tau))$$

задається умова резонансу у системі (3), (4) в точці τ, яка має вигляд

$$\gamma_k(\tau) = 0, k \neq 0.$$

Якщо $q = \theta = 1$, то одержимо стандартну умову резонансу $\left(k, \omega(\tau)\right) = 0$, $k \neq 0$,

для багаточастотної системи диференціальних рівнянь без запізнення аргументу.

Ідея обґрунтування методу усереднення на підставі оцінки відповідного осциляційного інтеграла належить А.М. Самойленку і розвинута у монографії [2] та в інших його працях з учнями.

Досліджено в роботі питання існування, єдиності та побудовано ефективну оцінку методу усереднення на відрізку $[0, L]$ при досить малому значенні малого параметра $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0]$.

Аналогічно як в [3], доведено оцінку для осциляційного інтеграла (5) вигляду

$$\|I_k(\tau,\varepsilon)\| \le c\varepsilon^{\alpha}\left(\sup_{D_1}\|X_k(\tau,a_\Lambda)\| + \frac{1}{\|k\|_\Theta}\sup_{D_1}\left\|\frac{dX_k(\tau,a_\Lambda)}{d\tau}\right\|\right),$$

де $\alpha = \kappa/mq$, $\|k\|_\Theta = \sum_{\nu=1}^{q}\theta_\nu\|k_\nu\|$, $D_1 = D^p \times (0, \varepsilon_0]$. Важливо, що одержана оцінка рівномірна відносно k і не залежить від ε.

Теорема. Нехай вектор-функції X, Y і ω неперервно диференційовані за всіма змінними до порядку mq, визначник Вронського за системою функцій $\{\omega(\theta_1\tau), \ldots, \omega(\theta_p\tau)\}$ відмінний від нуля на [0,L], існує розв'язок усередненої задачі і компонента $\bar{a}(\tau)$ лежить в $\mathbb{D}$ разом із деяким околом.

Тоді для досить малого ε^* існує єдиний розв'язок системи рівнянь (3), (4), $a(0,\varepsilon) = \bar{a}(0)$ і $\varphi(0,\varepsilon) = \bar{\varphi}(0,\varepsilon)$, і для всіх $\tau = \in [0, L]$, і кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ виконується оцінка

$$\varepsilon^{\kappa_2}\| a(\tau;\bar{y},\bar{\psi},\varepsilon) - \bar{a}(\tau;\bar{y}) \| + \varepsilon^{\kappa_1}\| \varphi(\tau;\bar{y},\bar{\psi},\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau;\bar{y},\bar{\psi},\varepsilon) \| \le c_1\varepsilon^{\alpha+\kappa_1+\kappa_2},$$

де $c_1 > 0$ і не залежить від ε.

Модельний приклад одночастотної системи

$$\frac{da}{d\tau} = \varepsilon^{\kappa_1}\cos(k\varphi + l\varphi_\theta), a(0,\varepsilon) = a_0, \qquad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1+2\tau}{\varepsilon^\kappa}, \varphi(0) = 0, \qquad (7)$$

$$\varphi_\theta(\tau) = \varphi(\theta\tau), 0 < \theta < 1; k, l \in \mathbb{Z};\ \kappa_1 \ge 0, \kappa > 0.$$

Усереднена задача

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = 0, \bar{a}(\tau) = a_0.$$

Умова резонансу:

$$\gamma(\tau) = (k + l\theta) + 2\tau(k + \theta^2 l) = 0.$$

Умова незастрягання в околі резонансу виконується, оскільки

$$\begin{vmatrix} 1+2\tau & 1+2\theta\tau \\ 2 & 2\theta \end{vmatrix} = 2(\theta - 1) \ne 0.$$

Оскільки $\varphi(\tau,\varepsilon) = (1+\tau)\tau/\varepsilon^\kappa$, то

$$k\varphi + l\varphi_0 = \frac{\tau}{\varepsilon^\kappa}[(k + l\theta) + \tau(k + l\theta^2)].$$

Випадок резонансу: $k + l\theta = 0, \gamma(0) = 0$,

$$a(1,\varepsilon) - \bar{a}(1) = \varepsilon^{\kappa_1}\int_0^1 \cos\frac{s^2 c_2}{\varepsilon^\kappa}ds = \varepsilon^{\kappa_1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{8c_2}}\varepsilon^{\frac{\kappa}{2}} + o(\varepsilon^{\frac{\kappa}{2}})\right) = O\left(\varepsilon^{\kappa_1 + \frac{\kappa}{2}}\right),$$

$c_2 = k + l\theta^2$.

Нехай $\kappa - 1 = \kappa_1 = 0$, тоді $a(1,\varepsilon) - \bar{a}(1) = O(\sqrt{\varepsilon})$, що узгоджується з [3].

Для нерезонансної системи:

$$k + l\theta^2 = 0, \qquad \gamma(\tau) = k + l\theta \ne 0.$$

$$|a(\tau,\varepsilon) - \bar{a}(\tau)| = \varepsilon^{\kappa_1}\left|\int_0^\tau \cos\frac{(k+l\theta)}{\varepsilon^\kappa}s ds\right| \le \varepsilon^{\kappa+\kappa_1}/|k + l\theta|\ \forall\tau \ge 0.$$

Якщо $\kappa - 1 = \kappa_1 = 0$, то

$$|a(\tau,\varepsilon) - \bar{a}(\tau)| \le \varepsilon/|k + l\theta|,$$

як у випадку одночастотної системи без запізнення.

Розглянемо систему (6), (7) із крайовими умовами

$$\beta_0 a(0,\varepsilon) + \beta_1 a(1,\varepsilon) = d, \varphi(0) = 0.$$

Усереднена задача

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = 0, \beta_0\bar{a}(0) + \beta_1\bar{a}(1) = d,$$

$$\bar{a}(\tau) = \bar{y} = d/(\beta_0 + \beta_1).$$

Точний розв'язок

$$a(\tau,\varepsilon) = \bar{y} + \mu + \varepsilon^{\kappa_1}\int_0^\tau \cos\frac{c_2 s^2}{\varepsilon^\kappa}ds,$$

$$\mu = -\frac{\beta_0\varepsilon^{\kappa_1}}{\beta_0+\beta_1}\int_0^\tau \cos\frac{c_2 s^2}{\varepsilon^\kappa}ds,\ |\mu| \le c_3\varepsilon^{\kappa_1+\frac{\kappa}{2}}.$$

Похибка методу усереднення

$$|a(\tau,\varepsilon) - \bar{a}(\tau)| \le |\mu| + \varepsilon^{\kappa_1}\left|\frac{\beta_0}{\beta_0+\beta_1}\right|\left|\int_0^\tau \cos\frac{c_2 s^2}{\varepsilon^\kappa}ds\right| \le c_4\varepsilon^{\kappa_1+\frac{\kappa}{2}}.$$

Отже, одержано нові оцінки методу усереднення для систем із запізненням і різними значеннями малого параметра у рівняннях для амплітудних і фазових змінних.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Yu. A. Mitropol'skii, A. M. Samoilenko, and D. I. Martynyuk, "Systems of Evolution Equations with Periodic and Quasiperiodic Coefficients," Dordrecht: Springer Dordrecht, 1993.

[2] A., Samoilenko, and R. Petryshyn, "Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems," Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.

[3] Ya.I. Bihun, "On existence of solution and averaging for multipoint boundary-value problems for manyfrequency systems with linearly transformed argument," Nonlinear oscillations, vol. 11(4), 2008, pp. 462–471.

[4] Ya. Bihun, R. Petryshyn, and I. Krasnokutska, "Averaging method in multifrequency systems with linearly transformed arguments and with point and integral condstions," Acta et Coomentationes, Exact and Natural Sciences, vol. 6(2), 2018, pp. 20–27.

[5] Бігун Я. Й., Скутар І. Д. Усереднення в багаточастотних системах із запізненням та локально-інтегральними умовами. Буковинський математичний журнал. 2020. Vol. 8(2). C. 14–23.

[6] Y. Bihun, R. Petryshyn, I. Skutar, and H. Melnyk, "Multifrequency system with multipoint and integral conditions," Acta et Coomentationes, Exact and Natural Sciences, vol. 2(12), 2021, pp. 11–24.