Системна методологія моделювання фільтраційних і гідравлічних процесів: ідентифікація кривих розділу сильно контрастних неоднорідно анізотропних середовищ методами комплексного аналізу

https://doi.org/10.31713/MCIT.2023.032

Андрій Бомба
Кафедра комп'ютерних наук та прикладної математики
Національний університет водного господарства та природокористування
м. Рівне, Україна
a.ya.bomba@nuwm.edu.ua

Сергій Каштан
Кафедра комп'ютерних наук та прикладної математики
Національний університет водного господарства та природокористування
м. Рівне, Україна
s.s.kashtan@nuwm.edu.ua

Анотація—**При моделюванні процесів масопереносу (наприклад, фільтрації) в пористих середовищах можливі випадки існування сильно проникних шарів, які відокремлюються від відповідних досліджуваних частин деякими кривими, які потрібно знайти (ідентифікувати) в процесі розв'язування задачі. При побудові математичної моделі відповідного фізичного процесу вважатимемо сильно проникне середовище «ідеально (теоретично нескінченно) проникним». У цьому випадку шукану криву можна вважати еквіпотенціальною лінією. У цій роботі розглядається стаціонарний процес руху рідини в неоднорідно анізотропному горизонтальному нескінченно великих розмірів пласті – ґрунтовому масиві, що обмежений нескінченними ділянками кривих, зокрема – шуканою кривою теоретичного водоупору та горизонтальною віссю, на якій відома локальна швидкість руху. На основі методів квазіконформних відображень запропоновано підхід до ідентифікації такої кривої розділу середовищ. Побудований алгоритм модифіковано для розв'язування нелінійних обернених крайових задач на квазіконформні відображення криволінійних многокутних областей, обмежених невизначеними лініями течії та еквіпотенціальними лініями. Запропонований підхід, окрім ідентифікації кривих, дозволяє паралельно знаходити характеристичну функцію течії, квазікомплексний квазіпотенціал, повну витрату, будувати в заданій області динамічну сітку та розрахувати поле швидкості фільтрації.**

Ключові слова—квазіконформні відображення, обернені задачі, неоднорідно анізотропне середовище, моделювання, ідентифікація, числові методи, аналіз даних.

I. Вступ

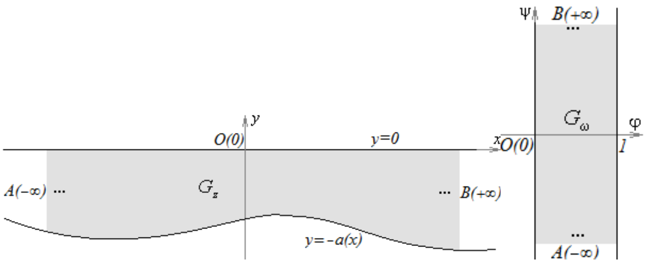
При моделюванні, наприклад, процесів масопереносу (фільтрації) в пористих середовищах можливі випадки існування сильно проникних шарів, які відокремлюються від досліджуваної його частини деякими кривими, які потрібно знайти (ідентифікувати) в процесі розв'язування задачі. У цьому випадку шукану криву можна вважати еквіпотенціальною лінією.

У цій роботі йдеться про застосування методу квазіконформних відображень до ідентифікації кривої розділу пористих неоднорідно анізотропних середовищ.

Ефективним методом математичного моделювання фільтраційних процесів у криволінійних областях обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями є розроблений нами у попередніх роботах [1 – 7] підхід на основі комплексного аналізу з використанням числових методів квазіконформних відображень. В роботах [5 – 7] побудовані алгоритми чисельного обернення розв'язків нелінійних крайових задач на конформні і квазіконформні відображення в одно та багатозв'язних областях, обмежених лініями течії та екпквазіпотенціальними лініями – математичних моделей процесів руху рідин, газів, заряджених частинок і т.ін. в однорідних і неоднорідних анізотропних середовищах. Зокрема, у роботах [6, 7] розв'язані задачі моделювання відповідних процесів у середовищах, схильних до деформацій, де компоненти тензора провідності (зокрема фільтрації) приймались залежними не лише від координат біжучої точки області, але й від шуканих функцій течії та потенціалу. Запропонований підхід дозволяє паралельно знаходити характеристичну функцію течії, квазікомплексний потенціал, повну витрату і поле швидкостей та побудувати динамічну сітку.

II. Постановка задачі

Розглядаємо стаціонарний процес руху рідини в неоднорідно анізотропному горизонтальному нескінченно великих розмірів пласті – ґрунтовому масиві, що обмежений нескінченними ділянками кривих, зокрема – нижньою кривою теоретичного водоупору $y = -a(x)$ ($a(x) \geq a_0 > 0,\ a(x)$ – неперервно диференційована функція) та віссю Ox – горизонтом (див. рис. 1) на якому відома локальна швидкість руху $v(x)$.



a) *b)*

Figure 1. Схематичне зображення «нескінченної» фізичної області (а) та області комплексного квазіпотенціалу (b)

Задачу на ідентифікацію функції теоретичного водоупору $y = -a(x)$ та відшукання комплексно спряжених функцій квазіпотенціалу $\varphi = \varphi(x, y)$ і течії $\psi = \psi(x, y)$ у розглядуваній фізичній області G_z $(z = x + \mathrm{i}\, y)$ – внутрішності $\partial G_z = AOBA$ (площині поперечного перерізу ґрунтового неоднорідного анізотропного пласта з тензором провідності $\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix}$) – однозв’язній криволінійній смузі, обмеженій лінією горизонту $AOB = \{z : y = 0, \quad -\infty < x < +\infty\}$ та невідомою лінією $BA = \{z : y = -a(x), \ -\infty < x < +\infty\}$ запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0, \quad (x, y) \in G_z, \tag{1}$$

$$\varphi\big|_{y=0} = 0,\ \varphi\big|_{y=-a(x)} = 1,\ \left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{y=0} = v(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2}$$

де $(\kappa_{rs})_{r,s=1,2}$ – обмежені неперервно-диференційовані в області G_z функції, що характеризують провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформацій, n – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі області ∂G_z, що, у цьому випадку, співпадає з напрямом осі Oy, $v(x)$ – локальна швидкість на горизонті, причому $\psi(x, 0) = \int_0^x v(\tilde{x})\, d\tilde{x}$.

Як відомо [5, 9], ця задача зводиться до квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + \mathrm{i}\,\psi(x, y)$ фізичної області G_z (з невідомою ділянкою $y = -a(x)$, яка ідентифікується на основі аналізу даних, отриманих в процесі розв'язання задачі) на відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega : 0 < \varphi < 1, -\infty < \psi < +\infty\}$ (див. рис. 1).

Алгоритм побудови розв'язку такої задачі будуємо аналогічно до [5 – 8].

III. Висновки

Розроблена методика розв'язання нелінійних крайових задач дозволяє розраховувати координати вузлів гідродинамічної сітки, обчислювати фільтраційні витрати, величини швидкості руху та інші параметри досліджуваних процесів, а також ідентифікувати криві розділу сильно проникних шарів. Розв’язок задачі отримується шляхом поетапного фіксування характеристик середовища та процесу і врахування механізму їх взаємовпливу. Результати проведених нами досліджень у цій та інших роботах приводять до необхідності перегляду методик, пов’язаних із розрахунками характеристик середовища та процесу, з метою уточнення останніх (при проектуванні дренажних споруд, оптимізації теплосистем, з ідентифікацією параметрів і керуванням процесами у нафтогазових пластах).

У перспективі – моделювання та прогнозування роботи слабопровідних (близьких до сланцевих) пластів в умовах гідророзриву, а також до побудови ліній розділу різнокольорових рідин при прогнозуванні квазіідеальної течії у водоймах, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями.

IV. Література

[1] Бомба А.Я., Бойчура М.В., Мічута О.Р. Ідентифікація параметрів структури ґрунтових криволінійних масивів числовими методами комплексного аналізу. Геофізичний журнал. 2022. Вип. 44(2). С. 53–67.

[2] Бомба А.Я., Бойчура М.В. Ідентифікація структури ґрунтових масивів числовими методами квазіконформних відображень. Кібернетика та системний аналіз. 2021. Вип. 57(6). С. 94–105.

[3] Бомба А.Я., Бойчура М.В., Сидорчук Б.П. Узагальнення числових методів квазіконформних відображень для задач геології. Східно-Європейський журнал передових технологій. 2020. Вип. 5(4(107)). С. 45–54.

[4] Бомба А.Я., Бойчура М.В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації. Рівне: НУВГП, 2020. 188с.

[5] Бомба А.Я., Каштан С.С., Пригорницький Д.О., Ярощак С.В. Методи комплексного аналізу. Рівне: НУВГП, 2013. 415 с.

[6] Bomba A.Y., Kashtan S.S. On One Method for Constructing a Dynamical Mesh of Nonlinear Quasiperfect Processes in Deformable Anisotropic Media. Journal of Applied Computer Science. 2005. Vol. 12(2). P. 7–21.

[7] Бомба А.Я., Каштан С.С. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах. Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. 2001. Вип. 4. С. 182–195.

[8] Бомба А.Я., Каштан С.С. Ідентифікація кривих розділу сильно контрастних середовищ методами комплексного аналізу. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2023. Вип. 1. С. 17–22.

[9] Положий Г.Н. Численное решения двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Киев: КГУ, 1962. 161 с.