Моделювання вимушених гармонічних коливань прямокутного фундамента на водонасиченій шаруватій основі

https://doi.org/10.31713/MCIT.2023.042

Олег Савицький
Leading scientist, Department of Hydrodynamical Acoustics
Institute of Hydromechanics of NASU
Kyiv, Ukraine
savitskii@nas.gov.ua
ORCID 0000-0002-9212-1744

Abstract—**A numerical study of the dynamic contact problem is carried out by the method of orthogonal polynomials. A symbolic solution was found for the double transformants of the vertical displacements of the layered two-phase poroelastic liquid saturated base under the action of arbitrary vertical contact pressures. Numerical analysis was performed for the Rayleigh function and the components of displacements in the kernels of integrable functions. An example of calculating double integrals necessary to determine the contact pressures of two-phase soil under the base of the foundation is given.**

Keywords—dynamic contact problem; orthogonal polynomials method; Biot's model; symbolic solution; Rayleigh wave, normal waves in the layer.

I. Вступ

Динамічні дії на фундаменти споруд викликають реакцію ґрунтової основи, яка складається з жорсткості (пружної) та загасання (за рахунок втрат у ґрунтовому матеріалі та випромінювання пружних хвиль). Нормативні методики оцінки складових реакцій (жорсткості та загасання) і амплітуд переміщень поширених фундаментних конструкцій прямокутної у плані форми не завжди враховують особливості ґрунтової основи. Застосування сучасних геотехнічних програмних засобів для аналізу коливань системи фундамент - основа залишається складною для постановки задач проблемою з досить тривалими розрахунками.

Метою роботи є розробка комп'ютерної програми для моделювання вимушених коливань прямокутного у плані жорсткого штампу на пористопружному насиченому рідиною (ППНР) шарі з защемленою нижньою гранню. Підошва фундаменту непроникна для порової рідини. Для таких умов коливання ускладнюються за рахунок взаємодії фаз ґрунтового середовища, а також прояву резонансних явищ для певних частот коливань в залежності від геометричних характеристик розрахункової схеми.

Для моделювання основи використовується символьний розв'язок задачі про гармонічні коливання з врахуванням всіх хвильових процесів в рамках моделі суцільного середовища. Застосовуються рівняння моделі Моріса Біо [1] для ППНР ґрунту у формі [2, п. 1.3.2].

II. Динамічна контактна задача

Динамічна взаємодія малозаглибленого прямокутного фундаменту з ґрунтовою основою при вимушених вертикальних гармонічних коливаннях розглядається як динамічна контактна задача. Контактні умови на підошві фундаменту в сейсмічному діапазоні частот та при обмежених експлуатаційних умовах складаються з рівняння коливань фундаменту під дією силового навантаження чи заданого переміщення та відповідності переміщень фаз під підошвою та підошви фундаменту. Напружений стан ґрунту та переміщення визначається тільки на поверхні підошви.

Застосовується метод ортогональних поліномів [2] для розв'язку динамічних контактних задач. З застосуванням інтегральних перетворень отримано систему інтегральних рівнянь, контактні тиски на межі двофазного середовища представлено інтегро-диференційними співвідношеннями для набору функцій, що розкладаються в ряди по ортогональних поліномах. Для підвищення ефективності враховуються особливості для контактних тисків фаз ґрунту під краями фундаменту. Систему інтегральних рівнянь зведено до нескінченої системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів рядів по ортогональних поліномах. Її розв'язок методом покращеної редукції призводить до визначення контактних тисків, амплітуд реакції основи та переміщень фундаменту при вимушених гармонічних коливаннях. Окремо в аналітичному вигляді виділено інтегральні реакції фаз на підошві, що дозволяє порівняти внесок фаз.

Такий метод споріднений з методом граничних елементів, який широко використовується при дослідженнях контактних задач. Маємо один граничний елемент – площу підошви, представлення невідомих функцій та їх розподіл виконується методом ортогональних поліномів. Всі моди коливань фундаменту можна розглядати при умові підбору систем ортогональних поліномів [2].

III. Символьний розв'язок для трансформант переміщень фаз

Розглянуто задачу про переміщення фаз ППНР шару висотою *Ha* з затисненою нижньою гранню під дією на прямокутній площадці (розмірами $2a$, $2b$) верхньої грані шару (позначеної сірим кольором на рис. 1) під дією на тверду пружну пористу та рідинну пору фази тисків (безрозмірнісних відносно модуля зсуву в основі) q_1 (причина ефективних напружень в твердій фазі) та q_2 (тиск в рідині) з симетрією, що відповідає контакту підошви фундаменту при його вертикальних коливаннях без тертя. На Рис. 1 показано чверть шаруватої основи, для ґрунтового середовища x, y необмежені, $0<z<Ha$. В Декартовій системі координат *Oxyz* використано рівняння [2, (7.3) - (7.4)] з формулами для тисків та переміщень для запису граничних умов [2, (7.6) - (7.11)]. Система (порядку 8 з числом змінних біля 20) та проміжні символьні розв'язки занадто громіздкі, формули наведено у звіті ІГМ НАНУ по бюджетній темі (2022 р.). Приклад для відповідної плаской задачі наведено в [2, п. 7.3.1].

IV. Функція Релея та функції компонент переміщень

Детермінант системи рівнянь з граничних умов на гранях ППНР шару для визначення коефіцієнтів в виразах для чотирьох потенціалів (вісім коефіцієнтів при експонентах з позитивними та негативними аргументами, що залежать від товщини шару, трьох об'ємних хвиль в ППНР середовищі та частоти коливань) визначається в символьній формі (при застосуванні системи комп'ютерної алгебри Maple) після переходу до радіальної системи координат [2, стор. 357, 358].

На рис. 2 показано значення комплексної функції $F_R(\zeta)$ в залежності від дійсної змінної інтегрування x

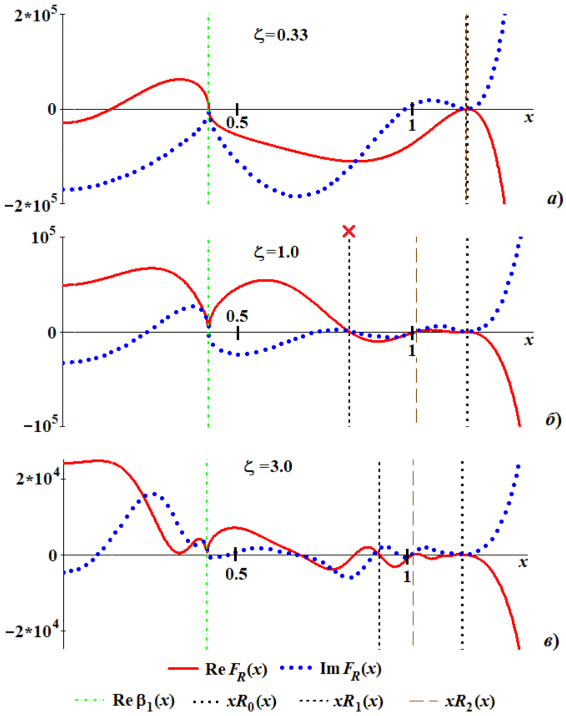

Рисунок 2. Функція Релея для *а*) ζ=0.33; *б*) ζ=1.0; *в*) ζ=3.0

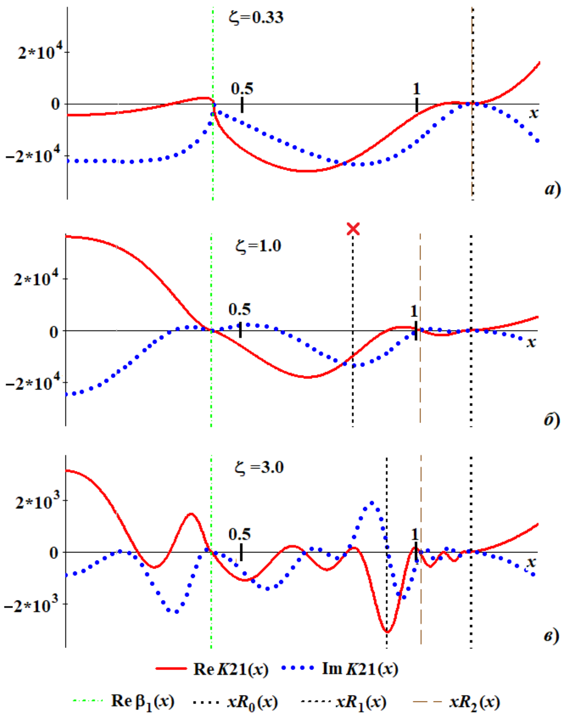

Рисунок 3. Функція K21 для *а*) ζ=0.33; *б*) ζ=1.0; *в*) ζ=3.0

в діапазоні від 0 до значення, що відповідає швидкості поверхневої хвилі $xR0(x)>1$. Для більших значень x функція експоненційно зростає. Діапазон містить точку Re$\beta1(\zeta)$ швидкості першої поздовжньої хвилі відносно c_2 – референтної частоти поперечної хвилі в ППНР середовищі [1, (5.4)]. Тут $\zeta=a\,\omega/c_2$ - безрозмірнісна частота, ω - кругова частота коливань.

Тут для прикладів на рис. 3, рис. 4 вибрано три значення ζ: *а*) ζ=0.33; *б*) ζ=1.0; *в*) ζ=3.0, а також розрахункові геометричні параметри: a=5 м, H=2.8, b/a=1. Для моделі Біо взято параметри з [2, п. 7.2.2,

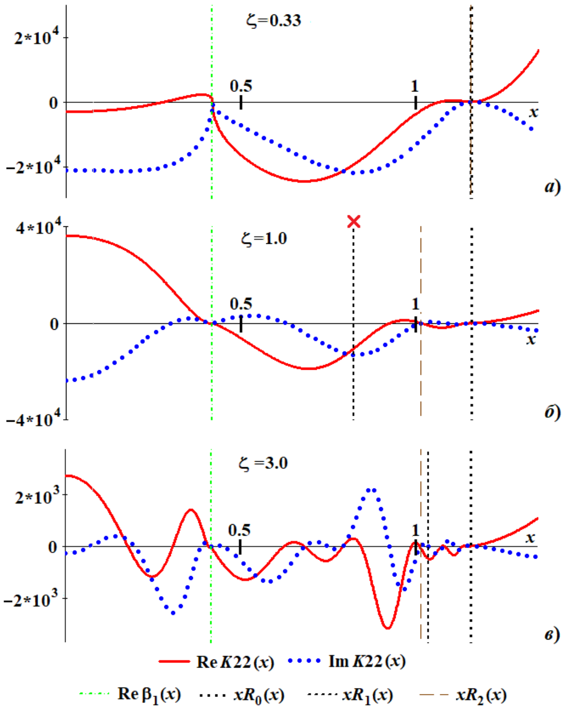

Рисунок 4. Функція K22 для *а*) ζ=0.33; *б*) ζ=1.0; *в*) ζ=3.0

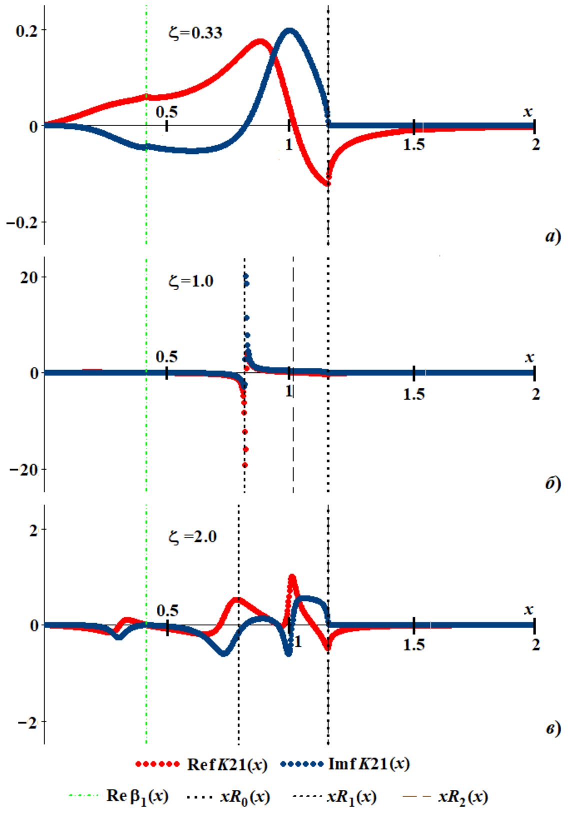

Рисунок 5. Ядро інтегралу K21 для *а*) ζ=0.33; *б*) ζ=1.0; *в*) ζ=2.0

стор. 364]. Розглядаємо традиційний для динаміки фундаментів діапазон $\zeta<6$, що для призначених параметрів відповідає частотам не вище 50 Гц. Для

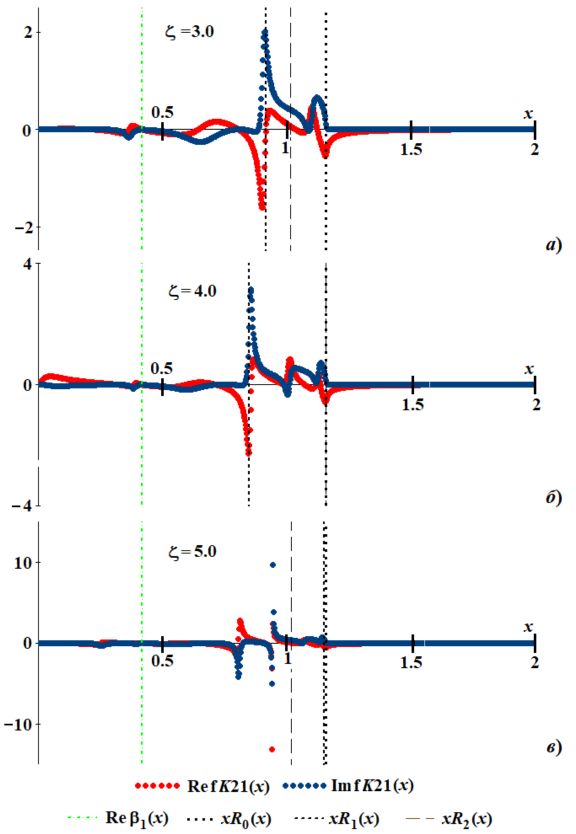

Рисунок 6. Ядро інтегралу K21 для *а*) ζ=3.0; *б*) ζ=4.0; *в*) ζ=5.0

невисоких ζ маємо для $F_R(\zeta)$ тільки корінь Релея. При наближенні ζ до 1.0 при x з'являється особливий корінь $\mathrm{Re}\beta 1<x<1$, що у поєднанні з ненульовим значенням чисельника призводить до різкої зміни знака функції ядра. Зі зростом частоти з'являються додаткові дійсні корені $xR1(x)$, $xR2(x)$, … функції $F_R(\zeta)$. При збільшенні ζ кількість коренів зростає, при цьому виникають коливання функцій, що розглядаються та ядер при наближенні до $\mathrm{Re}\beta 1$ та до $xR0$. Це стосується Fig. 2 - Fig. 6 на прикладі дискримінанту та символьних виразів трансформант переміщень твердої та рідинної фаз від тиску на тверду фазу.

На Рис. 3, Рис. 4 представлено зміну по x множників чисельників ядер, що відповідають переміщенням твердої фази ($K21$) та рідинної фази ($K22$) від тиску підошви на тверду фазу основи.

На Рис. 5, Рис. 6 показано приклади функції ядра з множником $K21$ для частот *а*) ζ=0.33; *б*) ζ=1.0; *в*) ζ=3.0) (Fig. 5) та *а*) ζ=3.0; *б*) ζ=4.0; *в*) ζ=5.0) (Рис. 6). Інтегрування функцій при ζ=1.0 вимагає застосування спеціальних прийомів та попереднього визначення коренів функції Релея.

V. Коефіцієнти системи для визначення коефіцієнтів рядів по ортогональним поліномам

Fig. 7 ілюструє зміну з частотою інтегралу одного з коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь (що відповідає коефіцієнту з [2, (7.41)] при p=0, q=0) для товщини шару в основі H=1.5 та H=5.0. На графіках показано згущення резонансних явищ біля невисоких частот при збільшенні товщини шару. Підінтегральні функції містять з представлень поліномів Чебишова також інтеграли від функцій Бесселя 1-го роду та тригонометричних функцій (див. приклад [2, стор. 356 - 359] для ППНР півпростору).

Теоретично в пружному шарі при навантаженні виникають нормальні хвилі на частотах, які носять назву власних частот шару. Слід також зауважити, що в умовах подібного навантаження в пружному шарі в певних інтервалах частот виникають обернені хвилі, які задовольняють умовам випромінювання. Для ППНР середовища ці закономірності мають зберігатись.

Частоти виникнення нормальних хвиль за номером n в пружному шарі в залежності від швидкості поздовжньої хвилі та товщини шару визначається формулою $\zeta_n=\pi\,(n+0.5)/(H\,\beta_1)$, ($n$=0, 1, 2…). З врахуванням пружних властивостей ППНР середовища наведемо значення перших трьох власних частот: ζ_0=2.505; ζ_1=7.516; ζ_2=12.526 для H=1.5 та ζ_0=0.752; ζ_1=2.255; ζ_2=3.758 для H=5.0 . На вказаних частотах коливання шару відбувається "без навантаження", що на графіках імпедансу (комплексної реакції на підошві при переміщенні одиничної амплітуди) підтверджується практично нульовим значенням імпедансу для власних частот. На даному етапі розробки розрахункової програми такий ефект для імпедансу проявляється. Але необхідне подальше вдосконалення алгоритму для уточнення оцінки подвійних інтегралів в коефіцієнтах алгебраїчної системи для визначення

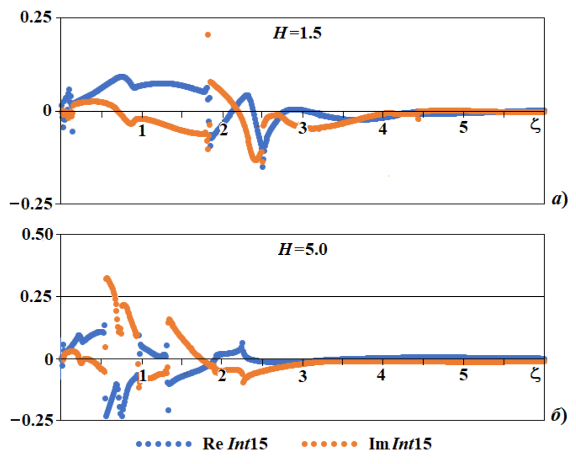

Рисунок 7. Залежність від безрозмірнісної частоти інтегралу з формули [2, (7.41)] (*Int*15) для шаруватої ППНР основи при *H*=1.5 та *H*=5.0

коефіцієнтів у рядах по ортогональних поліномах з інтегродиференціальних співвідношеннях [2, (7.26) – (7.33)]. Поки що результати розв'язку нестабільні.

Для оцінки інтегралів використовуються адаптивні процедури (Ньютона-Котеса та інші), застосовано зведення внутрішніх інтегралів після переходу у полярну систему координат до сумування рядів на основі квадратурної формули с ваговою функцією Якобі [2, стор. 360 - 362]. Для контролю проміжних результатів використовуються одночасно кілька засобів комп'ютерного програмування різного типу.

VI. Висновки

Для числового дослідження динамічної контактної задачі методом ортогональних поліномів знайдено символьний розв'язок для подвійних трансформант вертикальних переміщень фаз шаруватої двофазної ППНР основи (за моделлю Біо) під дією довільних вертикальних контактних тисків на підошві фундаменту-штампу при умовах постійного контакту без тертя та непроникної для порової рідини підошві. Виконано чисельний аналіз для функції Релея та функцій компонент переміщень в ядрах підінтегральних функцій що залежать від двох десятків параметрів, а також для одного з коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів рядів по ортогональних поліномах при знаходженні контактних тисків.

Список літератури

[1] M.A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Lower-frequency range," J. Acoust. Soc. Amer., vol. 28(2), 1956, pp. 168–178.

[2] A. Gomilko, O. Savytskyi, and A. Trofimchuk, "Superposition, eigenfunctions and orthogonal polynomials methods in elasticity and acoustic boundary value problems," Kyiv: Naukova dumka, 2016 [Гомилко А.М., Савицкий О.А., Трофимчук А.Н. Методы суперпозиции, собственных функций и ортогональных многочленов в граничных задачах теории упругости и акустики. Киев: Наук. думка, 2016. 436 с.] *itgip.org/category/ua_publishing-activities/ua_monographs_manuals_and_tutorials*