MCIT Modeling, control & information technologies

Числове моделювання диференціальних рівнянь із запізненням

https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.102

Ігор Черевко
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
м. Чернівці, Україна
i.cherevko@chnu.edu.ua

Тетяна Щур
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
м. Чернівці, Україна
lunyk.tetiana@chnu.edu.ua

Віктор Диренко
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
м. Чернівці, Україна
dyrenko.viktor@chnu.edu.ua

Анотація – **У роботі для числового моделювання початкових задач із запізненням побудовані та обґрунтовані різницеві схеми, які є узагальненнями класичних різницевих схем. Запропоновано алгоритм автоматизації методу кроків для наближеного розв'язання початкових задач, для реалізації якого використовуються різницеві схеми та метод апроксимації сіткових функцій. Для автоматизації моделювання систем із запізненням розроблено прикладний додаток, який застосований для числового аналізу динамічних моделей із запізненням. Проведені числові експерименти для модельних тестових прикладів.**

Ключові слова – **диференціальні рівняння із запізненням, початкова задача, різницева схема, числове моделювання систем із запізненням.**

I. Вступ

У багатьох реальних прикладних процесах в біології, екології, медицині та інших технологічних процесах відбуваються часові затримки (запізнення). Вони пов'язані із тривалістю певних прихованих процесів (інкубаційні періоди) в медицині, використання різноманітних датчиків для вимірювання та передачі сигналів в техніці тощо. Введення ефекту запізнення в диференціальні рівняння, що описують такі процеси є необхідним для побудови адекватних математичних моделей у вигляді систем диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь [1-2].

Численні застосування систем із запізненням призвели до активного зростання досліджень у різних напрямках теорії диференціально-функціональних рівнянь і появи нових цікавих теоретичних проблем, які потребують вирішення.

Знайти точний розв'язок диференціально-різницевих рівнянь вдається тільки у найпростіших випадках, тому методи побудови наближених розв'язків таких рівнянь мають важливе значення. Числові методи розв'язування початкових задач для диференціально-різницевих рівнянь розвивалися в працях [3,4]. При цьому в основному наближені методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь адаптуються на різні класи диференціально-функціональних та диференціально-різницевих рівнянь.

У даній роботі розглядається досліджена в роботі [5] сім'я θ різницевих схем, які є узагальненням різницевих схем Ейлера для інтегрування диференціальних рівнянь із запізненням та наведено алгоритм автоматизації методу кроків для початкових задач із запізненням.

II. Різницеві схеми для початкових задач із запізненням

A. Сім'я θ різницевих схем

Будемо розглядати початкову задачу для диференціально - різницевого рівняння запізнюючого типу

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in E_{t_0}. \tag{2}$$

де $t \in R$, $x(t) \in R^n$, $\tau > 0$, $E_{t0} = [t_0, t_0 - \tau]$ – початкова множина. Введемо рівномірну сітку

$$\omega = \{t_n = nh, n = -m, -m-1, ..., -1, 0, 1, 2, ..., k, k = \frac{T}{h}, m = \frac{\tau}{h}\}.$$

Будемо позначати через y_n наближене значення точного розв'язку $x(t_n)$ в точці $t = t_n$. У роботі [5] одержано сім'ю θ різницевих схем для задачі (1)-(2)

$$y_{n+1} = y_n + h((1-\theta) f(t_n, y_n, v_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1}, v_{n+1})).$$

Якщо $\theta = 0$, тоді одержуємо узагальнення явної різницевої схеми Ейлера.

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n, v_n).$$

У випадку $\theta = 1$ дістаємо узагальнення неявної різницевої схеми Ейлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}, v_{n+1}),$$

а при $\theta = 1/2$ маємо узагальнення різницевої схеми трапецій (неявна різницева схема Адамса другого порядку) для інтегрування диференціальних рівнянь із запізненням.

Зауваження 1. Якщо запізнення τ та крок h не є раціонально залежними, то апроксимація $x(t-\tau)$ в точці $t=t_n$ здійснюється за правилом

$$x(t_n-\tau)\approx v_n=\begin{cases}\varphi(t_n-\tau),\ якщо\, t_n-\tau<0,\\ v_n^i,\ якщо\, t_n-\tau\geq 0.\end{cases}$$

Значення v_n^i обчислюється за таким алгоритмом:

1) знаходимо i такий, що $t_i \leq t_n - \tau < t_{i+1}$;

2) значення v_n^i знаходимо використовуючи лінійну інтерполяцію за точками (t_i, x_i), (t_{i+1}, x_{i+1}):

$$v_n^i=\frac{t_n-\tau-t_i}{h}y_{i+1}+\frac{t_{i+1}-t_n+\tau}{h}y_i.$$

B. Автоматизація методу кроків

Метод послідовного інтегрування (метод кроків) полягає в тому, що на початку знаходимо розв'язок початкової задачі (1)-(2) при $t_0 \leq t \leq t_0+\tau$, дальше при $t_0+\tau \leq t \leq t_0+2\tau$, і т. д [6].

На першому відрізку $t\in[t_0, t_0+\tau]$ маємо задачу Коші:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), z(t)), \tag{4}$$

$$z(t) = x(t-\tau),\ x(s) = \varphi(s),\ s\epsilon[t_0-\tau,\ t_0]. \tag{5}$$

Наближений розв'язок задачі (4)-(5) можна знайти за допомогою деякої різницевої схеми, оскільки $z(t)$ відома функція, як множину точок

$$x_i = x(t_i),\ t_i=t_0+ih,\ i=0,\ldots,\ n,\ h=\tau/n. \tag{6}$$

На наступному відрізку $[t_0+\tau,\ t_0+2\tau]$ розглянемо задачу Коші:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), z_1(t)),$$

$$z_1(t) = x(t-\tau),\ x(s) = \varphi_1(s),\ s\epsilon[t_0,\ t_0+\tau].$$

де $\varphi_1(s)$ деяка апроксимація $x(t-\tau)$ за знайденими значеннями (6) на попередньому кроці. Продовжуючи цей процес ми побудуємо різницеву апроксимацію для початкових задач із запізненням, об'єднуючи деякий метод інтегрування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь та алгоритм апроксимації сіткових функцій.

III. Компютерне моделювання систем із запізнення

Для автоматизації моделювання систем із запізненням за допомогою наведених в роботі числових алгоритмів розроблено прикладне програмне забезпечення. Для його розробки використано мову програмування Python та фреймворк Python Flask Framework. Розроблений додаток представляє собою набір структурованих сторінок для розв'язання диференціально-різницевих рівнянь та побудови графіків знайдених розв'язків. Для керування додатком розроблено інтерактивне меню, що забезпечує можливість вибору задачі для розв'язання. Передбачено можливість користувачу введення не тільки числових параметрів, а також функцій з дотриманням синтаксису Python, які будуть використовуватись як повноцінна частина коду.

Досліджено SIR модель із двома запізненнями, що описує поширення захворювання Covid-19, де S(t) – кількість сприйнятливих осіб, які ще не інфіковані хворобою, I(t) – кількість інфекційних осіб, R(t) – кількість осіб, які одужали та мають імунітет, $\tau_1 > 0$ інкубаційний період вірусу, $\tau_2 > 0$ період відновлення

$$\frac{dS}{dt}=-\beta S(t-\tau_1)I(t-\tau_1),$$

$$\frac{dI}{dt}=\beta S(t-\tau_1)I(t-\tau_1)-\gamma I(t-\tau_2)-\alpha I(t),$$

$$\frac{dR}{dt}=\gamma I(t-\tau_2).$$

Ефективність моделі перевірялася в роботі [7] шляхом порівняння її прогнозів з реальними даними, зібраними у липні 2020 року в Німеччині.

За допомогою розробленого додатку знайдено наближений розв'язок цієї моделі з початковими параметрами $\beta=0.17$, $\gamma=0.03$, $\alpha=0.01$, $\tau_1=3$, $\tau_2=9$ та початковими функціями $\varphi(x)=1$, $\psi(x)=0.1$, $\xi(x)=0$, який достатньо добре співпрадає із результатами одержаними у роботі [7].

Література

[1] Arino, J. and van den Driessche. Time delays in epidemic models: modeling and numerical considerations. – Delay Differential Equations and Applications, 2006. – P. 539–578.

[2] Schiesser W.E. Time Delay ODE/PDE Models. Applications in Biomedical Science and Engineering. – Boca Rona, 2019. – 250 p.

[3] Bellen A., *Zenaro M.* Numerical methods for delay differential equations.– New York : Oxford University Press, 2003. – 395 p.

[4] Kuang J., Cong Y. Stability of Numerical Methods for Delay Differential Equations.– Elsevier Science, 2007. – 295 p.

[5] Луник Т.В., Черевко І.М. Моделювання математичних моделей біології та імунології із запізненням. Буковинський математичний журнал. 2021. – Т. 8, № 2. С. 92– 98.

[6] Bauer, R.J.; Mo, G.; Krzyzanski, W. Solving delay differential equations in S-ADAPT by method of steps. *Comput. Methods Programs Biomed.* 2013. – V. 111. – P. 715–734.

[7] Ebraheem H., Alkhateeb N., Badran H., Sultan E. Delayed Dynamics of SIR Model for COVID-19 // Open Journal of Modelling and Simulation. – 2021.– V. 9.– P. 146-158.