Існування періодичних режимів в моделі типу Скеллама

https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.094

Василь Маценко
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Чернівці, Україна
v.matsenko@chnu.edu.ua

Анотація **– Розглядається одне узагальнення моделі Скеллама, в якій мають місце монотонна стабілізація чисельності, періодичні режими та хаотична поведінка. Проведено комп'ютерне дослідження розв'язків моделі.**

Ключові слова **– дискретні моделі, модель Скеллама, стаціонарні стани, періодичні розв'язки, стійкість, збір урожаю.**

I. Вступ

Для опису динаміки чисельності популяції з неперекривними поколіннями застосовуються дискретні моделі. В простішому випадку вони мають вигляд $N_{t+1} = f(N_t)\,N_t$, де $N_t > 0$ – чисельність популяції в момент часу t, $f(N_t)$ – коефіцієнт природного відтворення.

Серед таких рівнянь найбільш відомими є дискретна логістична модель, модель Рікера та Скеллама.

Але, якщо для перших двох моделей характерним є існування періодичних розв'язків будь-якого періоду [1,2], то модель Скеллама допускає тільки режими з монотонною стабілізацією чисельності популяції до деякого рівноважного стану [3].

В даній роботі запропонована така модифікація моделі Скеллама, яка теж має циклічні і хаотичні режими. Розглядається також модель зі збором урожаю.

II. Дослідження моделі

Модель Скеллама має вигляд $N_{t+1} = aN_t / (b + N_t)$ [4], де a – найбільше значення коефіцієнта розмноження, а b описує вплив саморегулюючих механізмів на популяційну динаміку.

В роботі [3] розглянуто деякі модифікації моделі Скеллама, які теж допускають тільки монотонну стабілізацію.

Виявляється, що модель вигляду

$$N_{t+1} = aN_t / (b + N_t^3), \quad a, b > 0, \qquad (1)$$

володіє, крім стаціонарних станів, ще і періодичними і хаотичними режимами.

Рівняння (1) при $a > b$, крім нульового, має нетривіальний стаціонарний стан $N_1^* = (a - b)^{1/3}$.

При $a < b$ нульовий розв'язок є стійким. При $a > b$ $N_0^* = 0$ перестає бути стійким і з'являється розв'язок N_1^*, який буде стійким лише при умові $a/3 < b < a$.

Якщо $a > 3b$, то втрачається стійкість N_1^* (рис. 1) і з'являються періодичні розв'язки з періодом $T = 2$. Їх складають числа N_1^*, N_2^*, які знаходяться з рівняння

$$N_t = a^2 N_t\,(b + N_t^3)^2 / (b\,(b + N_t^3)^3 + (aN_t)^3). \qquad (2)$$

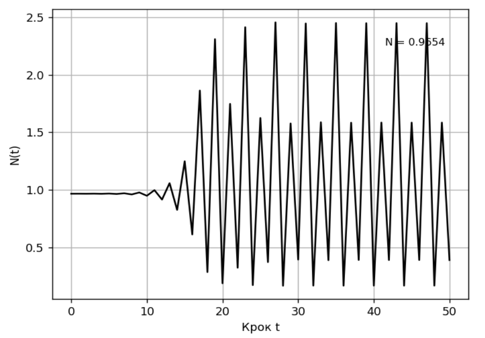

Рис. 1. Нестійкість стаціонарного розв'язку при $a = 1$, $b = 0.1$

Встановлено, що при $a > 3b$ рівняння (2) має два різні корені $N_1^* > 0$ і $N_2^* > 0$. Знайшовши мультиплікатор періодичного розв'язку одержуємо, що періодичний розв'язок з періодом $T = 2$ є стійким (рис. 2) при умові

$$(2^{1/2} - 1)a / 3 < b < a / 3.$$

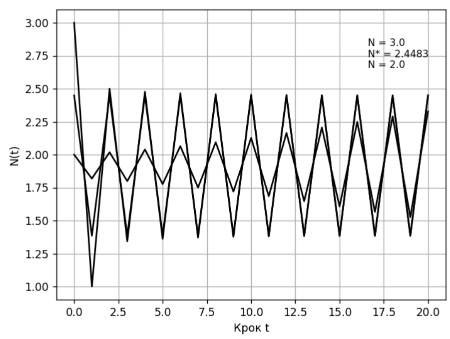

Рис. 2. Стійкість періодичного розв'язку ($T = 2$) при $a = 10$, $b = 3$

Це означає, що при $b < (2^{1/2} - 1)a / 3$ періодичний розв'язок ($T = 2$) перестає бути стійким, зате з'являється періодичний розв'язок з періодом $T = 4$.

Цей розв'язок знаходиться з умови $N_{t+4} = N_t$ для $t = 0, 1, 2, \ldots$, або те саме, що з рівняння $x = \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x))))$, де $\varphi(x) = ax / (b + x^3)$.

Такі рівняння уже можна розв'язувати лише числовими методами на комп'ютері.

Зокрема, при $a = 2.67$, $b = 0.227$ одержали T-цикл ($T = 4$), який задається числами $N_1^* = 0.19087$, $N_2^* = 3.73198$, $N_3^* = 0.55059$, $N_4^* = 2.17832$. Мультиплікатор цього розв'язку $\mu = 0.039 < 1$, що означає його стійкість (рис. 3).

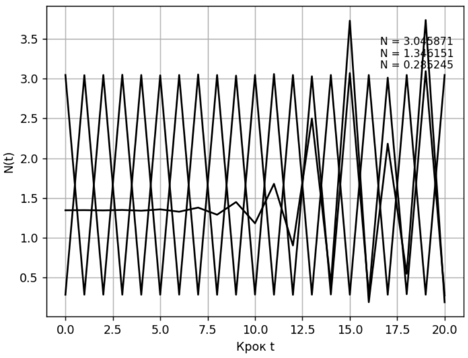

Рис. 3. Стійкість періодичного розв'язку ($T = 4$) при $a = 2.67$, $b = 0.227$

При цих значеннях a і b існуючі стаціонарні розв'язки і періодичні з періодом $T = 2$ нестійкі.

При подальшій зміні параметрів a та b з'являлись періодичні розв'язки з періодом $T = 8$, тобто відбувається біфуркація подвоєння довжини циклу, а саме виникають цикли довжиною 2^m ($m > 2$), при цьому втрачається стійкість циклу довжиною 2^{m-1}.

Зауважимо, що в результаті комп'ютерних експериментів для рівняння (1) не удалось знайти T-цикли для $T = 3$.

В даній роботі розглядалося ще узагальнення (1) на випадок м'якої стратегії збору врожаю, тобто

$$N_{t+1} = aN_t / (b + N_t^3) - kN_t, \quad a, b > 0,\ k \in (0,1). \quad (3)$$

Для рівняння (3) знайдені ненульові стаціонарні стани і встановлено умови їх стійкості у вигляді

$$(1 + 2k) / (1 + k)^2 < 3b/a < (3 + 2k) / (1 + k)^2.$$

При умові $b/a < (1 + 2k) / 3(1 + k)^2$ рівняння (3) має періодичні розв'язки ($T = 2$). Зокрема, при $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$ одержали періодичний розв'язок $N_1^* = 0.19945$, $N_2^* = 1.83793$, який є нестійким (рис. 4).

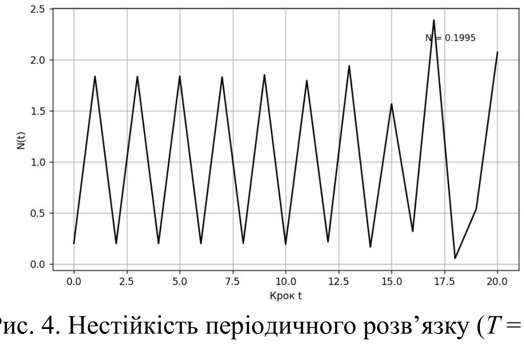

Рис. 4. Нестійкість періодичного розв'язку ($T = 2$) моделі зі збором урожаю при $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$

Для знаходження періодичних розв'язків з періодом ($T = 4$) розв'язувалося рівняння $x = \psi(\psi(\psi(\psi(x))))$, де $\psi(x) = ax / (b + x^3) - kx$ (рис. 5).

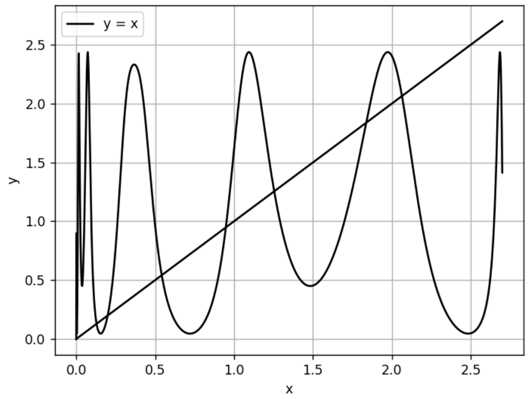

Рис. 5. Графічне розв'язування рівняння $x = \psi(\psi(\psi(\psi(x))))$

Зауважимо, що для рівняння (3) були знайдені розв'язки, які мають хаотичну поведінку (рис. 6).

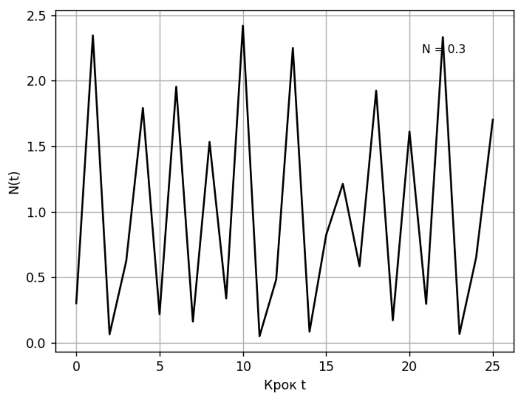

Рис. 6. Хаотичні режими при $a = 1$, $b = 0.1$, $k = 0.05$, $N_0 = 0.3$

III. Висновки

Як висновок зауважимо, що рівняння (1) та (3) мають монотонні, періодичні та хаотичні розв'язки. Відповідна зміна параметрів a, b приводить до біфуркації подвоєння довжини циклу.

Характерно те, що при експлуатації популяцій може втрачатися стійкість розв'язків, яка мала місце в моделі без збору врожаю. Такі моделі дозволяють кількісно оцінити допустимий рівень антропогенного навантаження на біологічні популяції.

Література

[1] Маценко В.Г., “Математичне моделювання екологічних процесів : навч. посібник”, Чернівці, Чернівецький нац. у-нт ім. Ю. Федьковича, 2019, 376 с.

[2] Маценко В.Г., “Моделювання процесів збору врожаю для популяцій з неперервними поколіннями”, Буковинський матем. журнал, 2022, 10(2), с. 165-175.

[3] Маценко В.Г. “Аналіз моделей Скеллама із жорсткою стратегією збору врожаю”, Буковинський матем. журнал, 2024, 12(1), с. 74-83.

[4] Skellam I.G., “Random dispersial in theoretical population”, Biometrica, 1951, 38, p. 196-218.