Математичне моделювання транспортних потоків дорожньої мережі на основі гідродинамічної аналогії

https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.101

Анатолій Сохацький
Інститут транспортних систем та технолгій Національної академії наук України
Кафедра транспортних технологій та міжнародної логістики
Університет митної справи та фінансів
Дніпро , Україна
Sokhatsky_anatoly@ukr.net

Анотація — **В теорії транспортних потоків існують різноманітні підходи та ряд класифікацій їх математичних моделей. Однією з найпоширеніших є класифікація на макроскопічні моделі та мікроскопічні моделі. В макроскопічних моделях розглядається ціла група транспортних засобів, яка описується відповідними параметрами руху. Мікроскопічні моделі основуються на концепції окремого транспортного засобу та підтримки безпечної відстані до лідера. Найбільш відомими моделями є модель оптимальної швидкості, модель слідування за лідером, модель розумного водія**

Метою роботи є побудова математичної моделі, числового методу, алгоритму розв'язування задачі та розробка комплексу програмного забезпечення для дослідження динаміки транспортних потоків.

В роботі розглядається задача моделювання транспортного потоку автомобільних транспортних засобів на основі гідродинамічної аналогії. Для математичного опису фізичного процесу використано систему диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса. Складнощі, що виникають при опису транспортного потоку схожі зі складностями, які виникають при описі турбулентного руху рідини.

Розроблено методику, алгоритм розв'язування задачі, та програмне забезпечення. Для числового інтегрування системи диференціальних рівнянь використано скінченно-об'ємний метод. Проведено тестування розробленої методики. За результатами числових розрахунків побудовано фундаментальну діаграму транспортного потоку.

Ключові слова — транспортні потоки, макроскопічні моделі, числове моделювання, рівняння Нав'є-Стокса.

I. Вступ

Математичне моделювання транспортних потоків і на сьогодні є доволі складною та актуальною задачею [1-5,8]. Найбільш досконалі математичні моделі транспортних потоків описуються рівняннями математичної фізики.

Математичне моделювання транспортних потоків і на сьогодні є доволі складною та актуальною задачею. Найбільш досконалі математичні моделі транспортних потоків описуються рівняннями математичної фізики.

.

Реальні транспортні потоки автомобільних транспортних засобів є складними і створюють проблеми транспортного сполучення в містах. Фізичне дослідження цих процесів пов'язане з значними матеріальними і фінансовими затратами. Застосування математичного моделювання для дослідження процесів в транспортних потоках є ефективним інструментом розв'язування поставлених задач та пошуку ефективних шляхів покращення використання транспортної інфраструктури. Проте Їх математичне моделювання і на сьогодні залишається складною проблемою обчислювальної динаміки транспортних потоків.

II. Стан моделювання транспортних потоків

В теорії транспортних потоків існують різноманітні підходи до класифікації їх математичних моделей [5,8]. Однією з поширених є класифікація на макроскопічні моделі та мікроскопічні моделі. В макроскопічних моделях розглядається ціла група транспортних засобів, яка описується відповідними параметрами руху. Мікроскопічні моделі основуються на концепції підтримки безпечної відстані до лідера. Найбільш відомими моделями є модель оптимальної швидкості, модель слідування за лідером, модель розумного водія Трайбера [8].

Макроскопічні моделі транспортних потоків можна отримувати з кінетичних моделей, подібно до того, як у кінетичній теорії отримують рівняння газової динаміки. Тобто за допомогою домножування на різні функції від швидкості. і подальшого інтегрування за швидкостями кінетичного рівняння для густини в розширеному фазовому просторі (t; x; v) .

В результаті таких дій буде виходити ланцюжок рівнянь, що зачіпляються. Так, якщо помножити кінетичне рівняння на одиницю і проінтегрувати, то

отримаємо рівняння для густини, яке відображає закон збереження маси. Проте туди буде входити середня швидкість. Якщо ж домножити кінетичне рівняння на швидкість і проінтегрувати, то тримаємо рівняння для середньої швидкості, тобто - закон збереження імпульсу сили. До нього також входитиме варіація швидкості. По суті, вона визначається середнім значенням квадрата швидкості.

Якщо помножити кінетичне рівняння на квадрат швидкості та потім проінтегрувати, то отримаємо рівняння для середнього значення квадрата швидкості. Звідки можна отримати рівняння для варіації швидкості, до якого входитиме середнє значення куба швидкості.

Доводиться в певний момент перетворень замикати цей ланцюжок, виходячи з додаткових фізичних міркувань та аналізу процесу, формулюючи певні гіпотези. Це можуть бути результати експерименту. Для замикання моментного ланцюжка приходиться вводити певні співвідношення. Ці співвідношення служать додатковими рівняння між величинами, що входять у ці рівняння. Так, для газу в залежності від цих співвідношень виходить модель ідеального газу або модель в'язкого теплопровідного газу – тобто модель Нав'є-Стокса.

Слід зазначити, що є також моделі, проміжні між кінетичними і гідродинамічними моделями. Це так звані мезоскопічні моделі.

У зв'язку з вище приведеним доречно зауважити, що класичним завданням статистичної фізики є дослідження переходу від рівняння Больцмана до рівнянь гідродинаміки або газодинаміки.

Проте центральним місцем залишається проблема замикання моментного ланцюжка для розв'язування рівняння Больцмана.

Відповідно широке розповсюдження отримали моделі транспортних потоків, які будуються на основі гідродинамічної аналогії цих стисливих потоків.

Однією з перших макроскопічних моделей є модель Лайтхілла–Уизема–Ричардса (LWR). В ній потік автомобільних транспортних засобів розглядається як одномірний потік стисливої рідини. В моделі LWR приймається, що існує взаємний однозначний зв’язок поміж швидкістю та густиною потоку, та виконуються закони збереження маси.

Потім з’явилися і інші макроскопічні моделі, що основувалися на аналогах транспортного потоку гідродинамічним особливостям течії стисливої рідини. Це модель Танака, Уізема. Пейна та інші. В 1995 році з’явилася модель Хельбінга–Ейлера–На’єьє–Стокса. В цій моделі до системи рівнянь Пейна добавляється третє рівняння, що відображає закон збереження енергії для варіації швидкості. В друге рівняння (закон збереження імпульсу) вводиться додаткова складова що дозволяє враховувати варіацію швидкості. Слід відмітити. що для системи рівнянь Нав’є-Стокса не відомо, як поставити початкову крайову задачу Коші. щоб глобальний розв’язок був єдиним при всіх значеннях часу. За вирішення цієї проблеми математичний інститут Клея США в 2000 році призначив премію в один мільйон доларів

Загальним фактом відмінностей гідродинамічних моделей транспортних потоків від відповідних гідродинамічних аналогів полягає в записі правої частини рівнянь. Це відноситься до коректного запису, як правило, гіперболічних систем рівнянь та їх дифузійних аналогів.

Слід зауважити, що складнощі, які виникають при опису динаміки транспортного потоку схожі зі складностями, що виникають при описі турбулентного руху стисливої рідини [6,7].

Використання математичного моделювання для дослідження динаміки транспортних потоків є ефективним інструментом для підвищення пропускної спроможності автомагістралей та підвищення безпеки руху. Розробка математичних моделей транспортних процесів є актуальним та важливим завданням. Метою роботи є побудова математичної моделі, числового методу, алгоритму розв’язування задачі та створення програмного забезпечення для дослідження динаміки транспортних потоків.

III. Постановка задачі

Для моделювання динаміки транспортних засобів на дорожній мережі використано систему рівняння Навьє-Стокса записних в двовимірній системі координат.

Дорожня мережа в загальному випадку має складну геометричну форму. У зв’язку з цим застосовуємо криволінійну систему координат. Для переходу до такої системи координат введемо

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}. \quad (1)$$

Якобіан перетворення системи координат запишемо у вигляді

$$j = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Метричні коефіцієнти виражаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \xi_x &= j y_\eta, \quad \eta_x = -j y_\xi, \\ \xi_y &= -j x_\eta, \quad \eta_y = j x_\xi. \end{aligned} \quad (3)$$

Згідно правил диференціювання складної функції маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Введемо контраваріантні складові вектора швидкості

$$\begin{cases} U = \xi_x u + \xi_y v \\ V = \eta_x u + \eta_y v \end{cases}. \quad (5)$$

де u,v – складові вектора швидкості транспортного потоку.

Так як дорожня мережа має складну геометрію вихідну систему диференціальних рівнянь для випадку для досконалого стисливого газу записано в криволінійній системі координат записані в наступному вигляді:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial \xi}+\frac{\partial E}{\partial \eta}=0\,, \qquad (6)$$

де Q – вектор невідомих змінних; E, F – вектори нев'язких потоків;

Вектори $Q, E, F,$ визначаються наступними співвідношеннями

$$Q=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\end{bmatrix},\; E=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho U\\ \rho Uu+\xi_x p\\ \rho Uv+\xi_y p\end{bmatrix},\; F=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho V\\ \rho uV+\eta_x p\\ \rho vV+\eta_y p\end{bmatrix}, \qquad (7)$$

де $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y,$ – метричні коефіцієнти, $J=\partial(\xi,\eta/\partial(x,y)$ – якобіан перетворення координат, u,v – складові вектора швидкості транспортного потоку, ρ -щільність транспортного потоку, $p=f_\rho\cdot\rho$

Вважалося, що компоненти вектори теплових та в'язких потоків не впливають на динаміку транспортного потоку.

IV. Розв'язування задачі

Транспортний потік розглядається, як аналог потоку стисливої рідини. Проте певними фізичними явищами, що характерні для стисливої рідини в деякому наближені можна знехтувати. В розробленій методиці не враховується рівняння енергії, тензори напружень та вектори теплових потоків. Виходячи з залежності (4) співвідношення для тиску слід визначати, як функцію від густини потоку.

Для числового розв'язування системи рівнянь (6) використано метод контрольного об'єму. Основні засади методу контрольного об'єму (МКО) полягають в тому, що розглядаються класичні рівняння балансу деякої величини Q в контрольному об'ємі V, обмеженому поверхнею $S=\sum S_k$ з зовнішньою нормаллю $\vec{n}$.

Отримана система алгебраїчних рівнянь розв'язувалася методом Ейлера. Розроблена методика, алгоритм та програмне забезпечення тестувалося на ряді стандартних задач.

Таким чином для прогнозування транспортних потоків роблено методику розрахунку, алгоритм та написано програмне забезпечення. Для апроксимації конвективних складових вихідного рівняння переносу імпульсу використано модифіковану протипотокову схему. Відповідно, розроблено механізм апроксимації значень шуканих функцій на гранях контрольного об'єму, який гарантує уникнення некоректних негативних швидкостей транспортних засобів. Алгоритм розроблено таким чином, щоб забезпечити виконання законів збереження (рис.1).

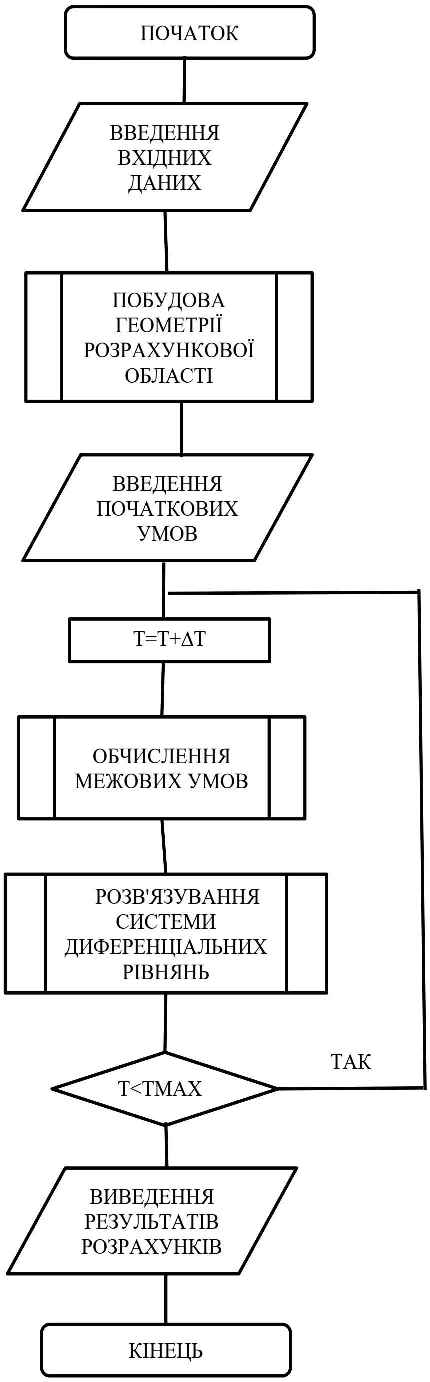

Рис. 1. Алгоритм розв'язування задачі

Члени рівнянь правої частини переносу імпульсу зазвичай апроксимуються за центрально-різницевою схемою. Фізичні процеси формування тензору напружень динаміки стисливої рідини відрізняються від фізичних процесів в потоці автомобільних транспортних засобів. Ця особливість враховувалась при розрахунку правих части рівнянь переносу імпульсу.

За результатами проведених числових розрахунків побудовано залежності інтенсивності руху транспортних засобів як функцію від густини потоку. На рис. 2. показано графік отриманих залежностей. Видно, що результати розрахунків узгоджуються з даними фундаментальної діаграми [8].

Вихідна система рівнянь записувалась та розв'язувалась в криволінійній двовимірній системі координат. Програмне забезпечення написано автором на мові програмування FORTRAN-95.

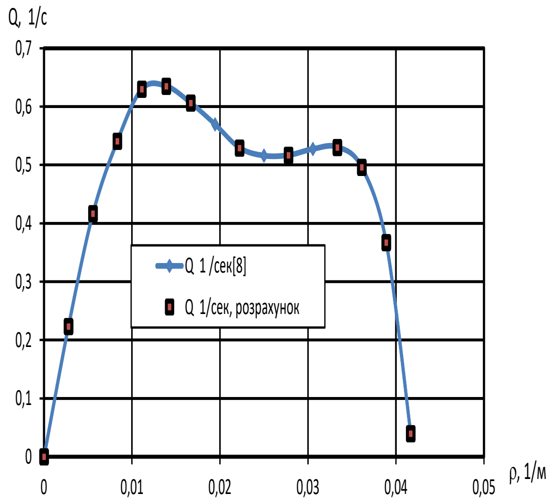

Рис. 2 Фундаментальна діаграма

Висновки

В роботі розглядається задача моделювання транспортного потоку автомобільних транспортних засобів. Для опису фізичного процесу використано систему рівняння Нав'є-Стокса. Розроблено методику, алгоритм розв'язування задачі, та програмне забезпечення. Для числового інтегрування системи диференціальних рівнянь використано скінченно-об'ємний метод. Проведено тестування розробленої методики. За результатами числових розрахунків побудовано фундаментальну діаграму транспортного потоку.

Література

[1] *Lighthill M. J., Whitham G. B.* On kinematic waves. II. Theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. R. Soc. London, Se. A. 1955. V. 229. P. 281–345.
[2] *Richards P. I.* Shock Waves on the Highway // Oper. Res. 1956. V. 4. P. 42–51.

[3] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.М.: Мир, 1977.

[4] *Хейт Ф*. Математическая теория транспортных потоков. М.: Мир, 1966.

[5] *Дрю А.* Теория транспортных потоков и управление ими. "Транспорт", 1972 г., стр. 1-424.

]6] *Гарбарук А. В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л.* Современные подходы к моделированию турбулентности . СПб. Изд-во Политехн. ун-та, 2016. 234 с.
[7] *Сохацький А. В.* Теоретичні основи створення аеродинамічних компонувань перспективних швидкісних транспортних апаратів: дис. доктора технічних наук: 05.07.01. Дніпропетровськ. 2010. 364 с.

[8] Введение в математическое моделирование транспортных потоков/ / Гасников А.В., и др. / Под ред. А.В. Гасникова. М.: МФТИ, 2010. 362 с.