Оптимальне керування переносом вологи у трапецієвидному пористому середовищі

https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.092

Дмитро Клюшин
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Київ, Україна
dmytroklyushin@knu.ua

Сергій Ляшко
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Київ, Україна
sergiylyashko@knu.ua

Андрій Тимошенко
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Київ, Україна
andriitymoshenko@knu.ua

***Анотація* – У статті запропоновано підхід для знаходження оптимальної потужності занурених у пористе середовище джерел для квазілінійного рівняння Річардса в трапецієвидній області. Застосовується перетворення Кірхгофа з введеним масштабуванням координат і потужностей занурених джерел, що дозволяє сформулювати безрозмірну задачу. Завдання цього дослідження полягає в тому, щоб знайти потужність занурених джерел - таку, щоб розподіл вологи в кінцевий момент часу був близьким до заданих значень або заданої цільової функції.**

***Ключові слова* – рівняння Річардса; керування; оптимізація; пористі середовища; перенесення вологи.**

I. Вступ

Рівняння Річардса у нелінійній формі продовжує бути об'єктом досліджень через його складність. Огляд деяких підходів пов'язаних розв'язанням близьких до рівняння задач, можна знайти наприклад, у Y. Zha, J. Yang, J. Zeng, C.-H. M. Tso, W. Zeng, L. Shi [1]. У випадку перемінно насиченої течії в неоднорідних пористих середовищах із шарами різних властивостей H. Suk, E. Park [2] запропонували чисельний метод розв'язання, який застосовується після перетворення Кірхгофа.

Дослідження K. Kumar, F. List, I. Pop, F. Radu [3] включає перелік ефективних моделей, ефективність яких було підтверджено чисельними розрахунками для опису течії у ненасиченому пористому середовищі, що містить тріщину. Нелінійний розв'язок рівняння Річардса за допомогою заміни змінних, зокрема, введення фіктивної змінної, запропонований S. Bassetto, C. Cances, G. Enchery, Q. H. Tran [4].

Кілька методів неявної та напівнеявної часової дискретизації були досліджені в S. Keita [5] з другим порядком точності, використовуючи формули екстраполяції та апроксимації рядами Тейлора для нелінійних членів часової дискретизації.

Часто рівняння Річардса розв'язують за допомогою локальних методів, зокрема, методу скінченних різниць, скінченних елементів і скінченних об'ємів [6], [7] із застосуванням ітераційних методів типу Ньютона.

Тому дослідження рівняння Річардса продовжуються і зараз, про що свідчать наведені вище наукові результати.

II. Двовимірна задача

Розглянемо математичну модель перенесення вологи для області ґрунту $\Omega = \left\{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\right\}$, де l_1 і l_2 — ширина і глибина відповідно з початковою вологістю близькою до 0, фіксованою вологістю на межі та визначеним цільовим розподілом вологості у кінцевий момент часу $\varphi(x, y)$. Рідину вважаємо нестискуваною, а тиск на систему постійним.

Модель представлена рівнянням Річардса з межовими умовами першого роду:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(\omega)\frac{\partial H}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(\omega)\frac{\partial H}{\partial y}\right] = \sum_{m=1}^{M} Q_m F(x - x_m, y - y_m)$$

$$(x, y) \in \Omega, t \in (0, T]; \qquad (1)$$

$$\omega\big|_{\partial\Omega} = \omega_0, \quad \omega\big|_{t=0} = \omega_0. \qquad (2)$$

У цьому рівнянні ω — позначає вологість, ω_0 — неусувну вологість, $H = \psi(\omega) - y$ — напір,

$K_x(\omega)$ — водопроникність вздовж осі Ox, $K_y(\omega)$ — водопроникність вздовж осі Oy, $F(x-x_m, y-y_m) \in L_2\left(\left(0,T\right)\times\Omega\right)$ — функція, що задає вплив на систему джерела, розташованого в точці (x_m, y_m). Для функції дифузійності уздовж осі Oy обрано $D_y(\omega) = K_y(\omega)\dfrac{d\psi}{d\omega} = e^{0.5\omega}$.

У правій частині рівняння (1) задано сукупність джерел відомої потужності Q_m, де $0 \le Q_m \le Q_{\max}, m = 1,...,M$. Розглядається задача лише для ненасиченого випадку.

Припустимо, що водопроникність за осями представляється у вигляді $K_x(\omega) = k_1 \cdot k(\omega)$, $K_y(\omega) = k_2 \cdot k(\omega)$ де k_1, k_2 коефіцієнти волого провідності уздовж осей Ox, Oy а $k(\omega)$ — вологопровідність. Не обмежуючи загальності, покладемо $k_1 = k_2$.

Виконаємо координатний перехід до області $\Omega_0 = \left\{(\xi,\zeta) : 0 < \xi < 1, 0 < \zeta < 1\right\}$ та масштабуємо потужності джерел для простоти обчислень $q_j = \dfrac{Q_j}{Q^*}$. Застосувавши перетворення Кірхгофа вигляду

$$\Theta\left(\omega\right) = \frac{4\pi k_1}{Q^* k_2 \beta_2}\int_{\omega_0}^{\omega} D_y(\omega)d\omega \qquad (3)$$

можемо перейти до рівняння вигляду:

$$L\left(\Theta\right) \equiv \frac{\partial\Theta}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial\zeta^2} + 2\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta} = $$
$$= \sum_{m=1}^{M} q_m \cdot F(\xi-\xi_m, \zeta-\zeta_m)$$
$$(\xi,\zeta) \in \Omega_0, \tau \in (0,1] \qquad (4)$$

$$\Theta\Big|_{\partial\Omega_0} = 0,\ \Theta\Big|_{\tau=0} = 0\,. \qquad (5)$$

III. Чисельне представлення задачі

Використаємо підхід скінченних різниць для представлення задачі з точи зору значень вологості у точках області. Враховуючи трапецієвидну форму, для точок на бокових границях в залежності від того, верхня чи нижня частина області є більшою, може бути відсутня точка нижче або вище від даної. Враховуючи це, підхід застосований у попередніх дослідженнях [7] було модифіковано відповідно до форми області. Всього можна виділити такі випадки розташування: всередині області, на лівій границі, на правій границі, на нижній чи верхній границі та у кутах. Для кожного з них було використано своє різницеве представлення рівняння з подальшим вираженням наступного кроку ітераційного процесу обчислень через попередній.

Знаючи поточне наближення потужності джерел, будемо намагатись оптимізувати його щоб мінімізувати середньоквадратичне відхилення значень вологості у точках $\Theta_{i,j}^n = \Theta\left(\dfrac{i}{20}, \dfrac{j}{20}, n\cdot 10^{-4}\right)$, $i,j = 0,...,20$, на кожному часовому кроці $n = 1,...,N$, враховуючи відомий розподіл вологи на границях та у початковий момент часу. Тоді рівняння всередині області має вигляд:

$$\frac{\Theta_{ik}^{n+1} - \Theta_{ik}^{n}}{\tilde{\tau}} = \frac{\Theta_{i+1k}^{n} - 2\Theta_{ik}^{n} + \Theta_{i-1k}^{n}}{h^2} + \frac{\Theta_{ik+1}^{n} - 2\Theta_{ik}^{n} + \Theta_{ik-1}^{n}}{h^2} -$$
$$-2\frac{\Theta_{ik+1}^{n} - \Theta_{ik-1}^{n}}{2h} + \sum_{m=1}^{M} F(\xi-\xi_i, \zeta-\zeta_k)\cdot q_m; \Theta_{ik}^{0} = 0.$$

Для випадку постановки задачі з умовою непроникності на границях при виведенні відповідних рівнянь використано наступні підходи до заміни похідних:

- Для точок верхньої границі по горизонталі заміна аналогічна до середини області, по вертикалі враховано точку(и) що знаходяться нижче.
- Для точок нижньої границі по горизонталі заміна аналогічна до середини області, по вертикалі враховано точку(и) що знаходяться вище.
- Для точок лівої похилої границі по вертикалі заміна враховує точку(и) над даною якщо верхня границя більша за нижню та під нею якщо навпаки. По горизонталі враховуємо значення вологості у точках праворуч.
- Для точок правої похилої границі по вертикалі заміна враховує точку(и) над даною якщо верхня границя більша за нижню та під нею якщо навпаки. По горизонталі враховуємо значення вологості у точках ліворуч.

Рівняння записуються та класифікуються відповідно до сіткового представлення області. При цьому загальний оптимізаційний підхід співпадає з випадком прямокутної області: побудувати пряму задачу, спряжену задачу та уточнюючий крок, детально описаний у наших інших роботах.

IV. Трапецієвидна область як приклад

У даному дослідженні рівняння виводились для області, зображеної на Рис. 1 з врахуванням вище згаданого підходу. Різним кольором позначено точки відповідно до класифікації, для кожної групи використано своє рівняння.

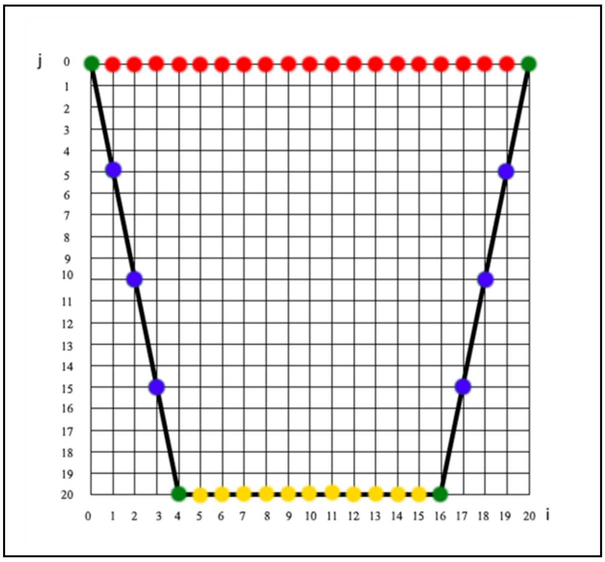

Рис.1 Приклад області, використаний для дослідження

Отже, даний підхід дозволяє застосувати методику аналізу оптимальної потужності джерел [7] до випадку трапецієвидної області з урахуванням її особливостей.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Y. Zha, J. Yang, J. Zeng, C.-H. M. Tso, W. Zeng, L. Shi, Review of numerical solution of Richardson-Richards equation for variably saturated flow in soils. Wiley Interdisciplinary Reviews: Water, vol. 6 issue 5. 2019. https://doi.org/10.1002/wat2.1364

[2] H. Suk, E. Park, Numerical solution of the Kirchhoff-transformed Richards equation for simulating variably saturated flow in heterogeneous layered porous media. Journal of Hydrology, vol. 579. 2019. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2019.124213

[3] K. Kumar, F. List, I. Pop, F. Radu, Formal upscaling and numerical validation of fractured flow models for Richards equation. J. Comput. Phys, vol. 407. 2019.

[4] S. Bassetto, C. Cances, G. Enchery, Q. H. Tran, Robust Newton solver based on variable switch for a finite volume discretization of Richards equation, In: Finite Volumes for Complex Applications IX - Methods, Theoretical Aspects, Examples, 2020, pp. 385-393.

[5] S. Keita, A. Beljadid, Y. Bourgault, Implicit and semi-implicit second-order time stepping methods for the Richards equation. Advances in Water Resources, vol. 148. 2021. https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.05224

[6] V.M. Bulavatsky, V.O. Bohaienko Boundary-value problems for space-time fractional differential filtration dynamics in frac tured-porous media. Cybernetics and Systems Analysis, vol. 58. pp. 358–371, 2022. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00468-9

[7] S. Lyashko, D. Klyushin, A. Tymoshenko Optimal control over inserted point source intensity for humidification of a two-dimensional porous medium . Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, vol. 12. 2024, pp. 13–18. https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.12.013