

Ряди Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.096>

Микола Приймак
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя.
м. Тернопіль, Україна.
pmw.ukr@ukr.net

Ключові слова – періодичні функції із змінним періодом; змінний період; ортогональна система тригонометричних функцій із змінним періодом; ряди Фур'є періодичних функцій із змінним періодом.

I. ВСТУП

Крім періодичних сигналів, період яких вважається постійним, в останні роки звернуто увагу на сигнали, які з однієї сторони ведуть себе подібно до періодичних, проте їх період вже не є постійним, а певним чином змінюється. Такими є електрокардіограми, отримані під час чи після дії на організм певного збудника спокою, звук сирени повітряної тривоги тощо. Для періодичних сигналів, моделлю яких є періодичні функції, методи їх дослідження розроблені достатньо різносторонньо [1]. Щодо сигналів із змінним періодом, то для їх вивчення найперше необхідно вибрати їх модель, яка б стала базою розробки методів аналізу вказаних сигналів. Таку модель вперше було запропоновано в [2], в якій був введений клас періодичних функцій із змінним періодом.

2. Ортогональна система тригонометричних функцій із змінним періодом. Наявність функцій із змінним періодом ставить нові проблемні задачі. Найперше – це побудова рядів Фур'є таких функцій. Передумовою для цього є наявність відповідної ортогональної системи функцій із змінним періодом. Вперше така система була побудована в [3], більш різносторонньо система досліджувалася в [4]. Має місце наступна

Теорема. Система тригонометричних функцій

$$1, \sin kx^\alpha, \cos kx^\alpha, \alpha > 0, x \in I, k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

змінний період якої $T(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$, є ортогональною із ваговою функцією $\rho(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ на довільному інтервалі

$$[x, x + T(x)] \quad (2)$$

при цьому скалярний добуток однакових функцій системи (1) рівний, різних – рівний нулю.

3. Ряди Фур'є періодичних функцій із змінним періодом.

Нехай $f(x)$ – періодична функція із змінним періодом $T(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$, ваговою є функція $\rho(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$ по ортонормованій системі (1) обчислюються за формулами

$$a_0 = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) dx, \quad a_k = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) \cos kx^\alpha dx, \quad (3)$$

$$b_k = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) \sin kx^\alpha dx.$$

Відповідний ряд Фур'є має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx^\alpha + b_k \sin kx^\alpha.$$

Якщо

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx^\alpha + b_k \sin kx^\alpha$$

скінченна сума ряду Фур'є, то згідно [4] середнє квадратичне відхилення S_n від f визначається за формулою

$$\|f(x) - S_n(x)\|_{\rho}^2 = \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} (f(x) - S_n(x))^2 \rho_\alpha(x) dx.$$

Зауваження. Аналіз формул (1), (2) і (3) показує, що в залежності від параметра α змінюється:

- ✓ ортогональна тригонометрична система функцій (1);
- ✓ інтервал ортогональності (2);
- ✓ вагова функція $\rho(x)$.

4. Приклади рядів Фур'є функцій із змінним періодом.

Для побудови скінчених рядів Фур'є функцій із змінним періодом було написано програмне

забезпечення. В розглянутих нижче прикладах для знаходження суми S_n параметру n надавалося значення 50.

Приклад 1. Розглянемо функцію $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{\frac{2}{3}}\right)$, для якої її змінний період $T_{\frac{2}{3}}(x) = -x + \left(x^{\frac{2}{3}} + 2\pi\right)^{\frac{3}{2}}$. Відповідно до виразу функції $f(x)$ ортонормованою є система:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin kx^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos kx^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\pi}}, k = 1, 2, \dots$$

Для знаходження коефіцієнтів (3) був вибраний інтервал ортогональності $[\tau, \tau + T_{\frac{2}{3}}(\tau)]$ при $\tau = 10$. Оскільки

$$T_{\frac{2}{3}}(10) = -10 + \left(10^{\frac{2}{3}} + 2\pi\right)^{\frac{3}{2}} \approx 26.11,$$

то таким є інтервал $[10, 10 + T_{\frac{2}{3}}(10)] = [10; 36.11]$. Було знайдено

$n = 50$ коефіцієнтів a_k і b_k ряду Фур'є. Графік скінченної суми ряду на проміжку $[0, 75]$ показаний на рисунку 1. Із поведінки графіка видно його «розтягування», що відповідає зростанню періода $T_{\frac{2}{3}}(x)$. Спостерігається також, що сума S_{50} досить «добре» відтворює саму функцію $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{\frac{2}{3}}\right)$, зображену пунктирною лінією.

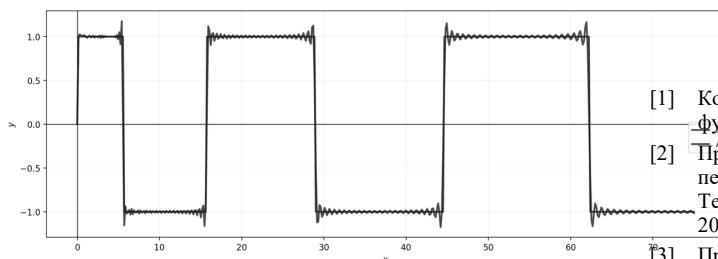


Рисунок 1. Графік скінченної суми ряду Фур'є функції $\text{sign}\left(\sin x^{\frac{2}{3}}\right)$,

Розглянемо ще приклад побудови скінченного ряду Фур'є для функції «дробова частина» числа.

Приклад 2. Нехай $f(x) = \left\{x^{\frac{3}{5}}\right\}$. Змінний

період цієї функції $T_{\frac{3}{5}}(x) = -x + \left(x^{\frac{3}{5}} + 1\right)^{\frac{5}{3}}$. Для знаходження коефіцієнтів ряду вибрано відповідну ортонормовану систему та інтервал інтегрування $[\tau, \tau + T(\tau)]$ при $\tau = 0$. Оскільки $T(0) = -0 + \left(0^{\frac{3}{5}} + 1\right)^{\frac{5}{3}} = 1$, то таким є інтервалом $[0, 0 + T(0)] = [0; 1]$. Графік скінченної суми S_{50} розміщено на рисунку 2.

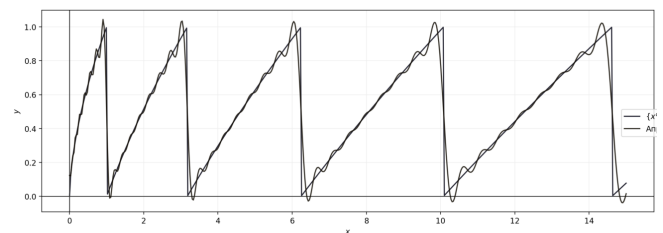


Рисунок 2. Графік скінченної суми ряду Фур'є для

функції $f(x) = \left\{x^{\frac{3}{5}}\right\}$.

Висновки.

За основний напрям досліджень періодичних сигналів із змінним періодом вибрано побудову їх рядів Фур'є, що еквівалентно заміні сигналів їх аналітичними функціями, якими є ряди Фур'є, з подальшим дослідженням вже не самих сигналів, а їх рядів. Отримані результати відкривають перспективні напрямки дослідження реальних сигналів із змінним періодом, зокрема електрокардіограм, отриманих під час чи після дії на організм збудника спокою.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: «Наука», 1976. – 542 с.
- [2] Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №2. – С. 132-141.
- [3] Приймак М.В. Ортогональні системи періодичних функцій із змінним періодом // Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. Тернопіль, вид. ТДТУ, 2007. – С.72.
- [4] Приймак М.В. Періодичні функції із змінним періодом та їх ряди Фур'є. Монографія. – Тернопіль: ТОВ Тернограф, 2024. – 136 с.