

Математичне моделювання одного класу фільтраційних і гідравлічних процесів

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.087>

Андрій Бомба

Національний університет водного господарства та
природокористування
Рівне, Україна
a.ya.bomba@nuwm.edu.ua

Сергій Каштан

Національний університет водного господарства та
природокористування
Рівне, Україна
s.s.kashtan@nuwm.edu.ua

Анотація — У роботі досліджуються ідеальні та квазіідеальні поля одного класу фільтраційних і гідравлічних процесів на прикладі озера Нобель (Рівненська область). при наявності джерела поперечних збурень в областях обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями. В залежності від значень потенціалів на еквіпотенціальних лініях, можливі різні випадки формування ліній розділу фільтраційних потоків у фізичній області, а отже – побудови області квазікомплексного потенціалу. Наближений розв’язок крайової задачі із ділянкою збурення на лінії течії отримується за допомогою алгоритму, який ґрунтується на почерговій параметризації величин конформних інваріантів, граничних і внутрішніх вузлів сіткової області з використанням ідей методу блочної ітерації. Запропонований підхід, окрім ідентифікації кривих, дозволяє паралельно знаходити характеристичну функцію течії, квазікомплексний потенціал, повну витрату, будувати в заданій області динамічну сітку та розрахувати поле швидкості фільтрації

При моделюванні процесів масопереносу (наприклад, фільтрації) в пористих середовищах можливі випадки існування сильно проникних шарів, які відокремлюються від відповідних досліджуваних частин деякими кривими, які потрібно знайти (ідентифікувати) в процесі розв’язування задачі. При побудові математичної моделі відповідного фізичного процесу вважатимемо сильно проникне середовище «ідеально (теоретично нескінченно) проникним». У цьому випадку шукану криву можна вважати еквіпотенціальною лінією. У цій роботі розглядається стаціонарний процес руху рідини в неоднорідно анізотропному горизонтальному нескінченно великих розмірів пласті – ґрунтовому масиві, що обмежений нескінченними ділянками кривих, зокрема – шуканою кривою теоретичного водоупору та горизонтальною віссю, на якій відома локальна швидкість руху. На основі методів квазіконформних відображень запропоновано підхід до ідентифікації такої кривої розділу середовищ. Побудований алгоритм модифіковано для розв’язування нелінійних обернених крайових задач на квазіконформні відображення криволінійних многокутних областей, обмежених невизначеними лініями течії та еквіпотенціальними лініями

Ключові слова — моделювання, конформні та квазіконформні відображення, обернені задачі, фільтраційні потоки, джерело збурень, керування, числові методи, озеро Нобель

І. ВСТУП

У цьому дослідженні представлені нові підходи до моделювання глобальних процесів руху поверхневих і підземних вод. Основною метою є розробка і аналіз відповідних математичних моделей та розвиток числових методів комплексного аналізу, які забезпечують можливість ефективно описувати і прогнозувати динаміку водних систем на глобальному рівні.

Дослідження охоплює аналіз формування ідеальної течії в залежності від заданих значень керуючого потенціалу [1, 2, 3]. Ідеальна течія, у цьому підході, розглядається як безв’язкий потік з відсутністю тертя, що дозволяє спростити аналіз і зосередитися на фундаментальних властивостях водних потоків. Моделі аналізуються в контексті різних геометричних конфігурацій і умов, що дозволяє виявити основні закономірності і механізми формування водних потоків у різних екосистемах.

Зокрема, на основі модифікації числового методу комплексного аналізу отримано комплексний потенціал та характеристичну функцію течії, наводяться приклади побудови динамічних сіток, ліній розділу течії, поля швидкості, формування різних перетоків (див., напр., рис.1). При цьому виділено типи так званих ключових задач стосовно знаходження таких значень керуючого потенціалу, які забезпечують оптимізацію конкретних функціоналів [2, 4, 5].

Застосування методів та підходів комплексного аналізу дозволяє детально дослідити вплив різних параметрів керуючого потенціалу на форму і характеристики течій. Проведено чисельні експерименти для оцінки точності моделей і верифікації їх з експериментальними даними. Результати показують, що побудовані моделі можуть адекватно описувати динаміку як поверхневих, так і підземних вод, що відкриває нові можливості для прогнозування і управління водними ресурсами на глобальному рівні.

Розроблені моделі дозволяють отримати результати із хорошою точністю та створюють нові інструменти для аналізу та управління водними екосистемами. Майбутні дослідження можуть бути зосереджені на розширенні цих моделей на випадки

врахування в'язкості і тертя, а також на застосування розроблених підходів для моделювання та прогнозування впливу кліматичних змін і антропогенних факторів на водні ресурси.

В багатьох випадках практики формули на знаходження характеристик середовища потребують задання функції швидкості. В реальних фізичних задачах, зокрема в задачах фільтрації, гідрології, часто це зробити або неможливо, або дуже складно. Тому запропоновано підхід, при якому по відомих значеннях потенціалів на кожній із ділянок витоку та втоку рідини в досліджувану область будується відповідна область квазікомплексного потенціалу.

II. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

У роботі [2] описано розроблений метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень) для побудови динамічної сітки потенційних та квазіпотенційних полів, побудови різного роду профілів та поля швидкості із паралельним розрахунком різних характеристик процесу. Тут, під оберненням такого роду задач мається на увазі як перехід від прямих задач до задач на конформне відображення відповідної області комплексного потенціалу на вихідну область, так і той факт, що вони містять невідомі параметри при додаткових відомостях про їх розв'язки.

Методику наближення розв'язків крайових еліптичних задач, можна перенести і на крайові задачі, які зводяться до конформних відображень довільної криволінійної області, обмеженої лініями течії та еквіпотенціальними лініями на область комплексного потенціалу, що має вигляд многокутника, границя якого складається із вертикальних та горизонтальних відрізків, променів, із декількома невідомими при відповідності вершин.

Також, розв'язана проблема нелінійного обернення крайових задач на конформні відображення в областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями з потенціалом керування на ділянці однієї із ліній течії. Окрім шуканого потенціалу і функції течії, у результаті побудовано ще й характеристичну функцію, описані усі можливі характерні випадки формування течії в залежності від заданих значень потенціалу керування, наводяться схеми побудови динамічної сітки, формування відповідних перетоків. При цьому, виділено типи задач (ключових) на знаходження тих значень потенціалу керування, що забезпечують оптимізацію певних функціоналів (витрат, витоку, втоку, перетоків, ін.).

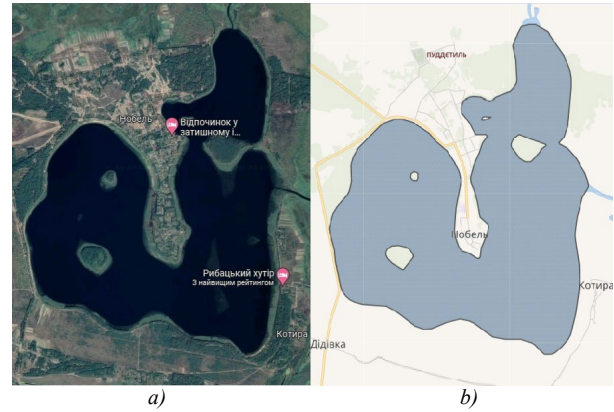


Рис. 1. Картографічне зображення озера Нобель
а) картографічні дані: © Google, 2024
б) карти Вікімедіа, [8]

Озеро Нобель розташоване у заплаві річки Прип'яті (Дніпровського басейну). Розділене на дві половини півостровом, який простягається з півночі на південь і на якому лежить село Нобель. Східна (більша) частина озера вузька і видовжена з півночі на південь, західна (менша) частина більш овальна. Є чотири острови – два великі і два малі. Підживлення відбувається за рахунок водообміну з річкою Прип'яті, яка впадає в його східну частину з півночі і впливає з нього зі східного боку [8].

III. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо модельну задачу на відшукування гармонічної функції $\varphi = \varphi(x, y)$ (потенціалу) в скінченій однозв'язній криволінійній області (пласт, що піддається певному впливу, напр., зміні, деформації) $G_z = ABMNKCD$ ($z = x + iy$), обмежених чотирма гладкими кривими (див. рис. 1):

$$\begin{aligned} AB &= \left\{ z: f_1(x, y) = x - 1 - \sin \frac{y}{2} = 0 \right\}, \\ BMNKC &= \left\{ z: f_2(x, y) = y - 18 - e^{\sin 0.5x} = 0 \right\}, \\ CD &= \left\{ z: f_3(x, y) = x - 20 - \cos \frac{y}{2} = 0 \right\}, \\ DA &= \left\{ z: f_4(x, y) = y - 1 - \cos \frac{x}{3} = 0 \right\} \end{aligned}$$

при умовах

$$\varphi|_{AB} = \varphi_* = 0, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^* = 1, \quad \varphi|_{MN} = \varphi^0,$$

$$\frac{d\varphi}{dn} \Big|_{DA} = \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{NKC} = \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{BM} = 0,$$

де n – зовнішня нормаль до відповідної кривої [2].

IV. МЕТОДИ

Ввівши гармонічну функцію $\psi = \psi(x, y)$ (функцію течії), комплексно спряжену до функції $\varphi = \varphi(x, y)$, і замінивши останні три граничні умови на умови

$$\psi|_{DA}=0, \quad \psi|_{NKC}=Q_1, \quad \psi|_{BM}=Q_2,$$

де Q_1, Q_2 – величини фільтраційних потоків (невідомі параметри), цю задачу замінимо [2] більш загальною задачею на конформне відображення $\omega=\omega(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ фізичної області G_z на

$$\text{область комплексного потенціалу } G_\omega = \bigcup_{l=1}^4 G_\omega^{(l)},$$

$$G_\omega^{(1)} = \{(\varphi, \psi): \tilde{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_1\},$$

$$G_\omega^{(2)} = \{(\varphi, \psi): \varphi_* < \varphi < \tilde{\varphi}, 0 < \psi < Q_1\},$$

$$G_\omega^{(3)} = \{(\varphi, \psi): \varphi_* < \varphi < \tilde{\varphi}, Q_1 \leq \psi < Q_2\},$$

$$G_\omega^{(4)} = \{(\varphi, \psi): \tilde{\varphi} < \varphi < \varphi^*, Q_1 \leq \psi < Q_2\}.$$

Тоді, відповідна обернена крайова задача на конформне відображення $z=z(\omega)=x(\varphi, \psi)+iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомих $\tilde{\varphi}, Q_1, Q_2$ у диференціальній формі запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, & \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \end{cases} (\varphi, \psi) \in G_\omega;$$

$$\begin{cases} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi))=0, & 0 \leq \psi \leq Q_2, \\ f_2(x(\varphi, Q_2), y(\varphi, Q_2))=0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ f_2(x(\varphi^0, \psi), y(\varphi^0, \psi))=0, & Q_1 \leq \psi \leq Q_2, \\ f_2(x(\varphi, Q_1-0), y(\varphi, Q_1-0))=0, & \tilde{\varphi} \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ f_2(x(\varphi, Q_1+0), y(\varphi, Q_1+0))=0, & \tilde{\varphi} \leq \varphi \leq \varphi^0, \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi))=0, & 0 \leq \psi \leq Q_1, \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0))=0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \end{cases}$$

Наближений розв'язок поставленої задачі отримано за допомогою розробленого програмного продукту, побудованого на основі алгоритму, який ґрунтується на почерговій параметризації величин конформних інваріантів, граничних і внутрішніх вузлів сіткової області G_z з використанням ідей методу блочної ітерації [2].

V. Випадки

Аналізуючи отримані у цій роботі та у [2] результати можна зробити висновок, що лінії розділу фільтраційних потоків за умови відсутності перетоку із джерелом збурення MN будуть утворюватися за подібним профілем у фізичній області G_z . При чому, основна точка їх розділу – точка K – буде пробігати від точки N до точки C , а значення потенціалу $\varphi|_K = \tilde{\varphi}$ знаходитиметься у межах $\varphi|_{MN} \leq \varphi|_K \leq \varphi|_{CD}$, що визначатиме ключові випадки. У цих випадках значення потенціалу φ^0 знаходиться в процесі розв'язання відповідної задачі

при додатковій (“компенсаційній”) умові про відоме положення точки K .

Також, ключовим випадком буде ситуація, коли $\varphi|_{CD} = \varphi|_{MN} = \varphi^0 = \varphi^* = 1$. У цьому ж випадку в процесі розв'язання відповідної задачі визначається положення точки K . Таким чином, в залежності від значень потенціалу φ^0 на додаткових еквіпотенціальних лініях (джерелах збурення MN) при збільшенні кількості еквіпотенціальних ділянок границі області, а також її зв'язності, область комплексного потенціалу $G_\omega = G_\omega(\varphi^0)$ будується індивідуально. У більш ширшому сенсі, в залежності від значення потенціалу $-\infty < \varphi^0 < +\infty$, можливі різні випадки формування течії у фізичній області, а отже – побудови області квазікомплексного потенціалу [2].

Запропонована методика, окрім знаходження характеристичної функції течії та комплексного потенціалу, дозволяє одночасно будувати в заданій області динамічну сітку та моделювати лінії розділу фільтраційних потоків, розрахувати поле швидкості фільтрації, а також розраховувати обчислювальні (ітераційні) характеристики та досліджувати і аналізувати процеси їх збіжності і стійкості.

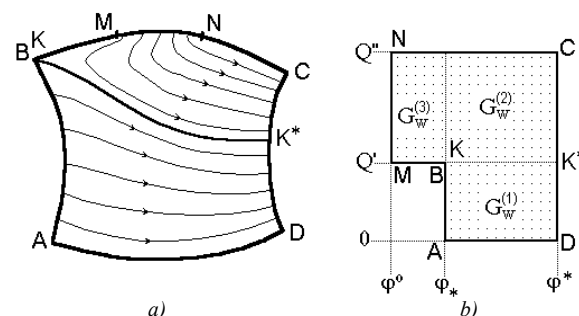


Рис. 2. Схематичне зображення «нескінченної» фізичної області (a) та області квазікомплексного потенціалу (b)

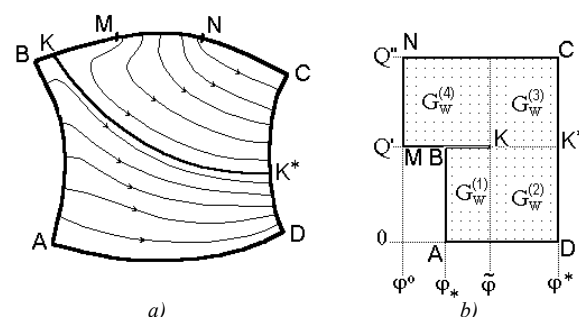


Рис. 3. Схематичне зображення «нескінченної» фізичної області (a) та області квазікомплексного потенціалу (b)

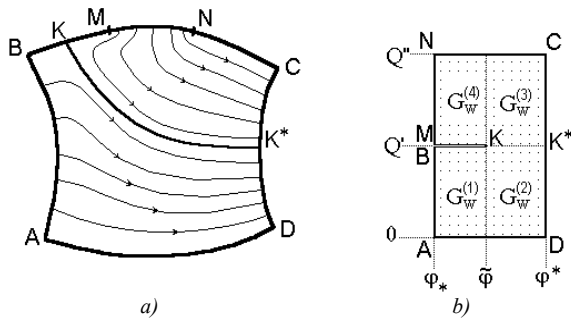


Рис. 4. Схематичне зображення «нескінченної» фізичної області (а) та області квазікомплексного потенціалу (б)

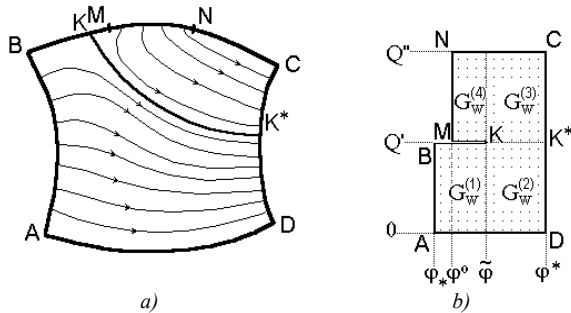


Рис. 5. Схематичне зображення «нескінченної» фізичної області (а) та області квазікомплексного потенціалу (б)

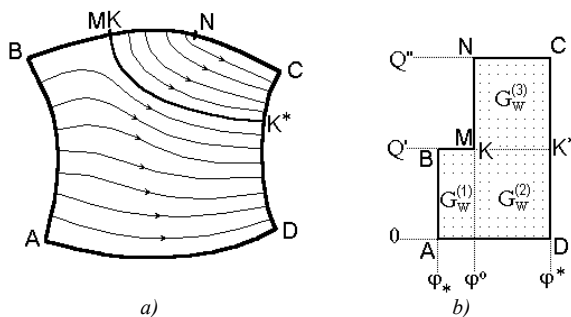


Рис. 6. Схематичне зображення «нескінченної» фізичної області (а) та області квазікомплексного потенціалу (б)

Розглянута методика наближення розв'язків крайових еліптичних задач, переноситься і на крайові задачі, які зводяться до конформних відображень довільної криволінійної області, обмеженої лініями течії та еквіпотенціальними лініями на область комплексного потенціалу, що має вигляд многокутника, границя якого складається із вертикальних та горизонтальних відрізків, променів, із декількома невідомими при відповідності вершин. Проблема існування розв'язків такого роду задач є давно розв'язаною лише в загальному. В кожному конкретному випадку розв'язність задачі забезпечується шляхом підбору відповідних параметрів.

ВИСНОВКИ

Розроблена методика розв'язання нелінійних крайових задач дозволяє розраховувати координати вузлів гідродинамічної сітки, обчислювати фільтраційні витрати, величини швидкості руху та інші параметри досліджуваних процесів, а також ідентифікувати криві розділу сильно проникних шарів. Розв'язок задачі отримується шляхом поетапного фіксування характеристик середовища та процесу і врахування механізму їх взаємодії. Результати проведених нами досліджень у цій та інших роботах приводять до необхідності перегляду методик, пов'язаних із розрахунками характеристик середовища та процесу, з метою уточнення останніх (при проектуванні дренажних споруд, оптимізації теплосистем, з ідентифікацією параметрів і керуванням процесами у нафтогазових пластах).

У перспективі – моделювання та прогнозування роботи слабопрвідних (близьких до сланцевих) пластів в умовах гідророзриву, а також до побудови ліній розділу різнокольорових рідин при прогнозуванні квазіідеальної течії у водоймах, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопечкий, "Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки," Київ: Наукова думка, 2007. 308 с.
- [2] А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак, "Методи комплексного аналізу," Рівне: НУВГП, 2013. 415 с.
- [3] А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярошак, "Моделювання фільтраційних процесів у нафтогазових пластах числовими методами квазіконформних відображень," Рівне: «Асоль», 2016. 238 с.
- [4] А.Я. Бомба, О.М. Гладка, А.П. Кузьменко, "Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень," Рівне: «Асоль», 2016. 283 с.
- [5] А.Я. Бомба, М.В. Бойчура, "Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації," Рівне: НУВГП, 2020. 201 с.
- [6] А.Я. Бомба, С.С. Каштан, О.О. Кушнір, "Методи комплексного аналізу моделювання глобальних процесів руху поверхневих та підземних вод," Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: збірник наукових праць 11-ї Міжнародної наукової конференції / за заг. ред. Р.М.Кушніра і Ю.В.Токового. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України, 2024. Вип. 6. С. 65-66.
- [7] "Гідрологічний режим та гідрологічні процеси," URL: <http://www.geograf.com.ua/zagalna-gidrologiya/3173-gidrologichnij-rezhim-ta-gidrologichni-protsesi> (дата звернення: 12.10.2024).
- [8] "Нобель (озеро)," URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Нобель_\(озеро\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/Нобель_(озеро)) (дата звернення: 12.10.2024).