

Математичне моделювання впливу забруднення довкілля на епідемічний процес

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.086>

Ярослав Бігун
кафедра прикладної математики та інформаційних
технологій
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
Чернівці, Україна
y.bihun@chnu.edu.ua

Олег Українець
кафедра прикладної математики та інформаційних
технологій
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
Чернівці, Україна
o.ukrainets@chnu.edu.ua

У роботі запропоновано математичну модель поширення епідемії із врахуванням забруднення довкілля, що може посилити перебіг епідемії. Модель ґрунтується на відомі SIR-моделі, в якій крім інтегрального екологічного фактору $E(t)$, враховано народжуваність і смертність у популяції. Динаміка долі схильного до інфікування населення у моделі залежить від відхилення рівня забруднення від деякого допустимого значення K і втрати імунітету до захворювання через час $\tau > 0$. Час одужання інфікованих осіб зростає із ростом значення $E(t) - K$. Знайдено стани рівноваги та досліджено їх стійкість. Проведено числовий аналіз математичної моделі.

Ключові слова: епідемія, базове репродуктивне число, математична модель, екологічний фактор, стан рівноваги, диференціальні рівняння із запізненням, комп'ютерне моделювання.

Оскільки процес відновлення довкілля найчастіше має коливний характер, який стабілізується відносно значення $E(t) = K$ при $t \rightarrow \infty$, то припустимо як в [1], що величина забруднення $E(t)$ є розв'язком рівняння Гачінсона:

$$\frac{dE(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{E(t - \Delta)}{K} \right) E(t) \quad (1)$$

де $0 < r$ – коефіцієнт лінійного росту, запізнення $\Delta > 0$ відображає середній час відновлення екологічного стану до допустимого рівня.

Врахуємо у моделі час $\tau > 0$ втрати імунітету після одужання, як в [2]. Перевищення рівня забруднення $E - K$ веде до збільшення кількості осіб, схильних до інфікування, а також може зрости час одужання після інфікування. Тому, ґрунтуючись на SIR-моделі [3,4], пропонується модель набуває вигляду:

$$\frac{dS(t)}{dt} = b - \beta S(t)I(t) + \alpha I(t - \tau) + \varepsilon(E(t) - K) - \mu S(t), \quad (2)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma(E(t))I(t) - \mu I(t), \quad (3)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma(E(t))I(t) - \alpha I(t - \tau) - \varepsilon(E(t) - K) - \mu R(t). \quad (4)$$

Тут

$$\gamma(E) = \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E(t) - K)}$$

та усі коефіцієнти в моделі – додатні числа.

Якщо початкові умови для системи рівнянь (1) – (4) невід'ємні і виконуються умови:

$$b - \varepsilon\sigma > 0, \sigma = \max|E(t) - K| \text{ при } t \geq 0; \\ \alpha(1 + \gamma_1\sigma) < \gamma_0,$$

то доведено, що неперервний розв'язок системи рівнянь (2) – (4) існує при $t > 0$ і невід'ємний.

Стан рівноваги, який відповідає відсутності епідемії, набуває вигляду:

$$I_1 = 0, \quad E_1 = K, \quad S_1 = b/\mu, \quad R_1 = 0, \quad (5)$$

а стан рівноваги, що відповідає наявності епідемії серед населення наступний:

$$S_2 = \frac{\gamma_0 + \mu}{\beta}, I_2 = \frac{\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu)}{\beta(\gamma_0 + \mu - \alpha)}, R_2 = \frac{(\gamma_0 - \alpha)I_2}{\mu}. \quad (6)$$

Теорема. Нехай виконуються умови:

$$\mu(\gamma_0 + \mu) < \beta b, \\ 0 < 2r\Delta < \pi$$

і базове репродуктивне число

$$R_0 = \frac{\beta b}{\mu(\gamma_0 + \mu)} < 1.$$

Тоді стан рівноваги (5) асимптотично стійкий і поширення епідемії не відбувається.

Дослідження стійкості стану рівноваги (6) зводиться до знаходження умов від'ємності коренів характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + (\alpha + \mu)\lambda + a(\gamma_0 + \mu - \alpha e^{-\lambda\tau}) = 0,$$

де $a = \beta I_2$. Зокрема, при $\tau = 0$ (миттєва втрата імунітету) стійкість досягається при виконанні умови

$$\alpha\beta I_2 < \gamma_0 + \mu - \alpha.$$

Проведено комп'ютерне моделювання динаміки поширення епідемії. Нехай запізнення $\Delta = \tau = 1$, якщо імунітет втрачається після одужання через час

τ , то під впливом екологічного фактору з ростом коефіцієнта r спостерігається коливання факторів S, I та R . З часом значення факторів моделі наближаються до стійких станів рівноваги (рис. 1-2),

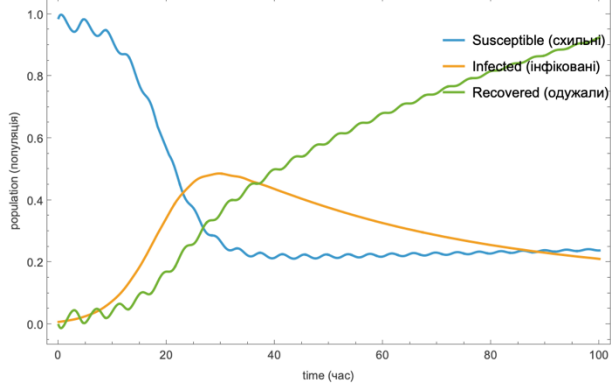


Рисунок 1. Динаміка S, I, R із врахуванням $E(t)$. Параметри: $\beta = 0.3, \gamma_0 = 0.08, \gamma_1 = 0.5, \varepsilon = 0.2, \alpha = 0.05, b = 0.005, \mu = 0.001; S_0 = 0.99, I_0 = 0.01, R_0 = 0, E_0 = 0.5$.

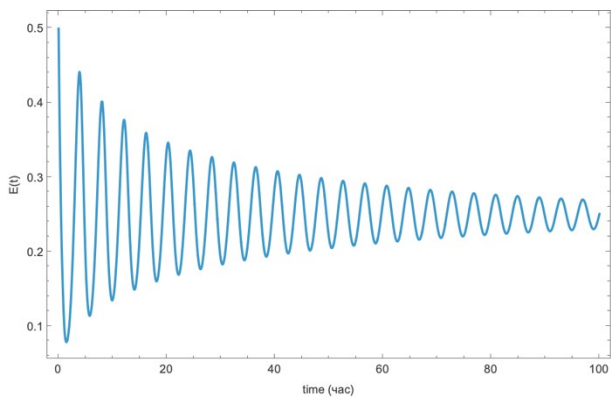


Рисунок 2. Графік розв'язку $E(t), r = 1.53, K = 0.25$.

Якщо $r\Delta = 2 > \pi/2$, то рівновага $E - K$ втрачає стійкість, і розв'язок $E(t)$ набуває коливального характеру (рис. 3-4). Таким чином, дія екологічного фактора $E(t)$ зумовлює періодичні зміни у поведінці розв'язку моделі.

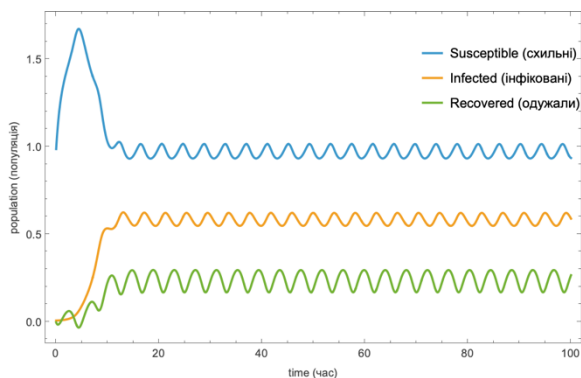


Рисунок 3. Динаміка S, I, R з урахуванням коливної поведінки фактору $E(t)$. Параметри: $\beta = 0.93, \gamma_0 = 0.4, \gamma_1 = 0.79, \varepsilon = 0.35, \alpha = 0.2, b = 0.9, \mu = 0.5, r = 1.7, K = 0.25, S_0 = 0.99, I_0 = 0.01, R_0 = 0, E_0 = 0.5$.

але при цьому залишається доля інфікованих осіб, яка зростає.

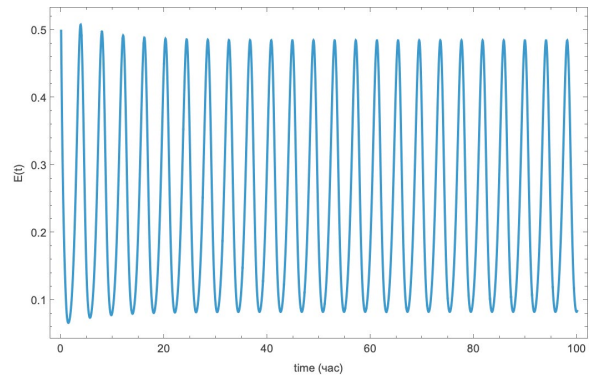


Рисунок 4. Графік розв'язку $E(t), r = 1.5, K = 0.25$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of the immune response to infectious diseases with the influence of environmental factors. *Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences*. 2024. Vol.~18(2). P.~7--17.. London, vol. A247, pp. 529--551, April 1955. (references)
- [2] Cooke K., van den Driessche P., Zou X. Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models. *Journal of Mathematical Biology*. 1999. Vol.~39. P.~332--352. I. S. Jacobs and C. P. Bean, "Fine particles, thin films and exchange anisotropy," in *Magnetism*, vol. III, G. T. Rado and H. Suhl, Eds. New York: Academic, 1963, pp. 271--350.
- [3] Martcheva M. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer: New York--Heidelberg--Dordrecht--London, 2015. 453~p. R. Nicole, "Title of paper with only first word capitalized," *J. Name Stand. Abbrev.*, in press.
- [4] Forys U. *Modele matematyczne w epidemiologii i immunologii. Matematyka stosowana*. 2000. Nr~1(42). P.~35--67. M. Young, "The Technical Writer's Handbook. Mill Valley," CA: University Science, 1989.