

Моделювання гідродинамічних процесів у водоймах з ділянками поповнення течії

<https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.087>

Андрій Бомба

професор, д. т. н., професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики НУВГП

Рівне, Україна

a.ya.bomba@nuwm.edu.ua

Олекса Кушнір

аспірант кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики НУВГП

Рівне, Україна

ol.o.kushnir@nuwm.edu.ua

Дослідження присвячено узагальненню чисельного методу комплексного аналізу моделювання гідродинамічних процесів у водоймах, обмежених лініями витоку-витоку та береговими непроникними лініями. Наведено математичну модель, різницеву схему та алгоритм побудови гідродинамічної сітки і знаходження невідомих величин (потенціалу, функції течії, витрат, а також місцезнаходження ліній розділу течії).

Ключові слова — повільний рух води; ідеальна течія; метод комплексного аналізу; чисельні методи конформних відображень.

I. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ТА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

Використовуючи фізичні закони, теорію векторних полів та методи комплексного аналізу, в попередніх дослідженнях розглядалися математичні моделі повільного руху води в областях, обмежених ділянками витоку-витоку та береговими непроникними лініями. Ці моделі будували для задач із одним, або декількома так званими береговими джерелами. При цьому визначали, як інтенсивність, або потенціал цих джерел впливає на рух води в цих областях.

А в роботі [9] запропоновано підхід до моделювання ідеальної течії у водному середовищі, обмеженому лініями течії та еквіпотенціальними поверхнями, зокрема у водоймі з притоками. Аналіз гідрологічного режиму водного об'єкта вказує на складну взаємодію підземних ґрунтових вод та поверхневих водних мас. У цій роботі вплив як поверхневих так і підземних вод, що підтримують основну течію (наприклад, притоки до водойми), на початковому етапі запропоновано моделювати як ділянки (джерела) поперечних збурень базового стоку. Побудовано алгоритм, що забезпечує можливість знаходити потенціали, а отже і поля швидкості руху, будувати лінії розділу течії та гідродинамічну сітку руху, обчислювати різного роду інтегральні параметри (величини перетоків, витрати тощо).

Ми продовжуємо ці дослідження, розглядаючи водойму з довільною кількістю джерел витоку та одним джерелом витоку, при умові, що відсутні перетоки з одного джерела витоку в інше. Аналогічно

до попередніх робіт, будується гідродинамічна сітка, і знаходиться потенціал, характеристична функція течії в будь-якій точці області, лінії розділу та витрати з кожного джерела, а також загальна витрата із джерела витоку. Вважається, що вода рухається повільно, зокрема відсутні завихрення і інші джерела поповнення/витоку, поки-що не враховуємо випаровування, фільтрацію, вітер, хвилі тощо.

Розглядається область G_z комплексної площини (z) ($z = x + iy$), обмежена N ділянками витоку, однією ділянкою витоку, а також береговими непроникними лініями (див. рис. 1), де A_k , B_k ($k = \overline{1, N}$) – крайні точки ділянок витоку, C , D – крайні точки ділянки витоку, K_k ($k = \overline{1, N-1}$) – початкові точки ліній розділу течії, K^k ($k = \overline{1, N-1}$) – відповідні їм кінцеві точки на ділянці витоку CD .

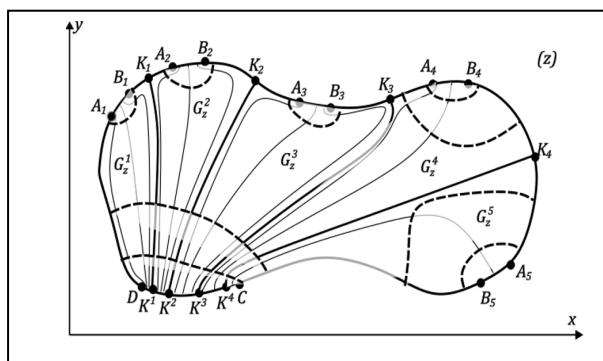


Рис. 1. Фізична область G_z для $N=5$

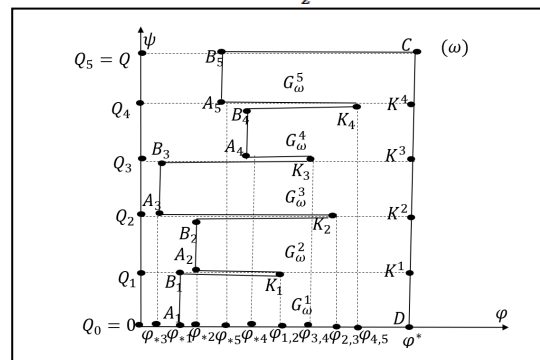


Рис. 2. Область комплексного потенціалу G_ω для $N=5$

Відповідну область комплексного потенціалу G_ω ($\omega = \varphi + i\psi$, де ψ - відповідна потенціалу φ функція течії) зображено на рис. 2, де через φ_{*k} , φ^* позначено відомі потенціали на кожній з ділянок, $\varphi_{k,k+1}$ - шукані потенціали в точках K_k , Q_1 , ..., $Q_k - Q_{k-1}$, ..., $Q_N - Q_{N-1}$, $Q = Q_N$ - шукані величини відповідних перетоків. Задача (пряма) полягає в знаходженні в G_z розв'язку системи Коші-Рімана: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, за відповідних граничних умов, і зводиться до конформного відображення області G_z на G_ω з відповідністю кутових точок. А остання задача, в свою чергу, зводиться до оберненого конформного відображення (знаходження характеристичної функції течії $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$) області G_ω на G_z .

II. РІЗНИЦЕВА СХЕМА, ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ЗАДАЧІ

Аналогічно до [1]-[9], відповідні підобласті комплексного потенціалу G_ω^k покриваємо рівномірними сітками, причому ці підобласті в свою чергу розбиваємо на декілька «підпідобластей» (регіонів) вертикальними прямими, що проходять через точки зі значеннями потенціалів в точках розділу K_k (через $\Delta\varphi_{kp}$ та $\Delta\psi_k$ позначено кроки сітки в p -му регіоні k -ї підобласті).

В процесі ітерацій координати x , у внутрішніх вузлів даної області уточнюємо за формулами:

$$\begin{cases} x_{k,i,j}^{s+1} = \frac{x_{k,i,j+1}^s + x_{k,i,j-1}^s + \gamma_{k,p}(x_{k,i,j+1}^s + x_{k,i,j-1}^s)}{2(1+\gamma_{k,p})} \\ y_{k,i,j}^{s+1} = \frac{y_{k,i,j+1}^s + y_{k,i,j-1}^s + \gamma_{k,p}(y_{k,i,j+1}^s + y_{k,i,j-1}^s)}{2(1+\gamma_{k,p})} \end{cases}, \text{ де}$$

$\gamma_{k,p} = \frac{\Delta\varphi_{kp}}{\Delta\psi_k}$, s - крок ітерації. При цьому, нами розроблена спеціальна процедура «склеювання» на «стиках» регіонів та підобластей. різні. Різницевий аналог для граничних вузлів будується, використовуючи рівняння межі, та умови ортогональності ліній сітки до межі області.

Алгоритм розв'язку даної задачі:

1. Задаємо рівняння межі області, параметри джерел, кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного потенціалу, параметри необхідної точності роботи алгоритму.

2. Задаємо початкове наближення шуканих координат вузлів динамічної сітки.

3. Обчислюємо початкові наближення конформних інваріантів, та кроків сітки, виходячи з міркувань «подібності в малому» відповідних «чотирикутників» областей G_ω та G_z .

4. Аналогічно до [9], проводимо уточнення внутрішніх, а потім граничних вузлів сітки, з урахуванням спеціальної процедури спряження.

5. Далі циклічно уточнюємо значення конформних інваріантів та кроків сітки. Умовами закінчення процесу можуть бути досягання заданої точності лише на границі заданої області (в силу принципу максимуму для еліптичних систем).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Бомба А.Я., Каштан С.С., Пригорницький Д.О., Ярошак С.В. Методи комплексного аналізу. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.
- [2] Бомба А.Я., Сінчук А.М., Ярошак С.В. Моделювання фільтраційних процесів у нафтогазових пластах числовими методами квазіконформних відображень. – Рівне: «Асоль», 2016. – 238 с.
- [3] Бомба А.Я., Гладка О.М., Кузьменко А.П. Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень. – Рівне: «Асоль», 2016. – 283 с.
- [4] Бомба А.Я., Бойчура М. В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації. – Рівне: НУВГП, 2020. – 201 с.
- [5] Бомба А. Я., Каштан С. С., Кушнір О. О. Методи комплексного аналізу моделювання глобальних процесів руху поверхневих та підземних вод. - XI Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (м.Львів, 24-26 вересня 2024р.). Львів: ІППММ, 2024. -2с.
- [6] Бомба А. Я., Кушнір О. О. Модифікація задачі Д. Гільберта при моделюванні процесів повільного руху рідин з перетоками. - Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference, (7), 282–283.
- [7] Bomba A.Ya., Kashtan S. S., Skopetskii V.V. Nonlinear Inverse Boundary - Value Problems of Conformal Mapping with a Controlling Potential Cybernetics and Systems Analysis.- 2004.- Vol. 40, №1.- P.58-65.
- [8] Бомба А. Я., Бойчура М. В., Савюк С. В. Числові методи квазіконформних відображень моделювання повільного руху рідини у водоймах. - Вісник НУВГП. – №2(74) – 2016. – С.92-106.
- [9] Бомба А. Я., Каштан С. С. Методи комплексного аналізу прогнозування керованих рухів поверхневих та фільтраційних вод. - Кібернетика та системний аналіз. №5 - 2025. - С.39-54.